POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

EXAMEN GÉNÉRAL DE SYNTHÈSE – ÉPREUVE ÉCRITE
Programme de doctorat en génie physique

Jeudi 15 octobre 2020

Salle L-1720 (pavillon Lassonde)

de 9h30 à 13h30

NOTES :

- Aucune documentation permise.
- Calculatrice électronique non programmable permise.
- Une feuille d'équations mathématiques et physiques se trouve à la page 2.
- Répondre à 6 questions au choix parmi les 8.
- Les questions ont toutes le même poids (20 points).
- Le questionnaire comporte 8 questions et 10 pages.
- Utiliser un cahier différent pour chaque question
  en prenant soin d'inscrire le numéro de la question sur celui-ci.

Département de génie physique
Pavillon principal
Téléphone : 514-340-4787
Télécopieur : 514-340-3218
Courriel : info@phys.polymtl.ca

Adresse postale
C.P. 6079, succ. Centre-ville
Montréal (Québec) Canada H3C 3A7
www.polymtl.ca

Campus de l'Université de Montréal
2900, boul. Édouard-Montpetit
2500, chemin de Polytechnique
Montréal (Québec) Canada H3T 1J4

FORMULES ET RELATIONS UTILES

Constantes

$1\ \text{Å} = 10^{-10}\text{m}$	$1\ \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}$	$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J s}$
$c = 2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s}$	$k_B = 1.381 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\ \text{N m}^2$
$m_e = 9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg}$	$m_p = 1.672 \times 10^{-27}\ \text{kg}$	$\lvert e\rvert = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{C}$
$N_A = 6.023 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$	$a_0 = 0.5291 \times 10^{-10}\ \text{m}$	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{N}^2/\ \text{A}^2$

Équations physiques

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f \ ; \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \ ; \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \ ; \qquad \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \ ; \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}\times\hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2}dV$$

$$f_{\text{FD}}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_BT}+1} \ ; \qquad f_{\text{BE}}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_BT}-1}$$

$$\frac{N\alpha}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \quad \text{(relation de Clausius-Mossotti)}$$

Intégrales

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = x - \ln(e^x+1) \qquad ; \qquad \int \frac{dx}{e^x-1} = \ln(e^x-1) - x$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-qx}dx = \frac{n!}{q^{n+1}}, \quad n > -1, q > 0 \qquad ; \qquad \int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}\alpha^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad ; \qquad \int_0^\infty x^{2n+1}e^{-\alpha x^2}dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}, \quad (\alpha > 0)$$

Identités trigonométriques

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \sin(2a) = 2\sin a\cos a$$

$$\sin a\sin b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos(a+b) \qquad \cos a\cos b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) + \tfrac{1}{2}\cos(a+b)$$

$$\sin a\cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a+b) + \tfrac{1}{2}\sin(a-b) \qquad \cos a\sin b = \tfrac{1}{2}\sin(a+b) - \tfrac{1}{2}\sin(a-b)$$

$$\cos x = (e^{ix}+e^{-ix})/2 \qquad \sin x = (e^{ix}-e^{-ix})/2i$$

Autres

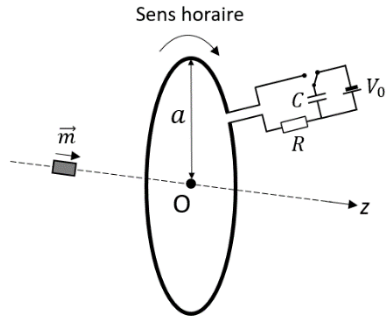
$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma \ \text{(loi des cosinus)} \qquad ; \qquad n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \ \text{(Approximation de Stirling)}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla\mathbf{A}) - \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} \ \text{(Identité)} \qquad ; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \approx \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \ \text{(Série)}$$

QUESTION 1 : ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

Canon magnétique

Considérez le modèle rudimentaire de canon magnétique (voir figure) qui permet d'accélérer un projectile aimanté. Le canon est constitué d'une boucle conductrice de rayon a située dans le plan $z = 0$, dans laquelle circule un courant $I(t)$ généré par la décharge d'un circuit RC (on néglige l'inductance de la boucle). L'axe z est parallèle à l'axe de la boucle.



Le projectile possède un moment magnétique $\vec{m} = m\hat{z}$ ($m > 0$) et il est initialement immobile sur l'axe z. Il est accéléré vers la droite, en restant sur l'axe z en tout temps. Le projectile se déplace dans l'air.

On fait l'hypothèse que le temps caractéristique τ du circuit RC est très petit, de sorte qu'on considère la décharge comme une brève impulsion de courant dans le domaine temporel.

(a) **(2 pts)** Dans quel sens le courant doit-il circuler dans la boucle (horaire ou antihoraire, voir figure) pour que le projectile gagne de la vitesse lorsqu'il est situé dans la région :
i) $z < 0$? ii) $z > 0$?

(b) **(8 pts)** Déterminez l'expression du champ magnétique $\vec{B}(z,t)$ produit par la boucle conductrice sur son axe.

(c) **(6 pts)** Déterminez l'expression de la force $\vec{F}(z,t)$ exercée sur le projectile.

(d) **(4 pts)** Esquissez un graphique de la force $\vec{F}(z,t)$ en fonction de la position z du projectile à un temps donné. Proposez une stratégie pour maximiser la vitesse finale du projectile sachant qu'il part immobile.

Loi de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Énergie magnétique d'un dipôle magnétique

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Force sur un dipôle magnétique

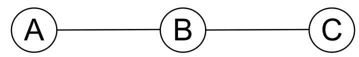
$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B}$$

Décharge d'un circuit RC

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}, \qquad \tau = RC$$

QUESTION 2 : **MÉCANIQUE QUANTIQUE**

Un électron se trouve dans une molécule linéaire constituée de trois atomes équidistants. On utilisera $|A\rangle$, $|B\rangle$ et $|C\rangle$ pour décrire les états orthonormaux de l'électron qui correspondent à des états localisés respectivement sur les atomes A, B et C.



Si on néglige la possibilité que l'électron saute d'un atome à un autre, son énergie est décrite par un Hamiltonien $\hat{H}_0$ tel que

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0 \end{pmatrix}$$

dont les états propres sont les trois états $|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle$ avec la même valeur propre E_0. On considère ensuite la perturbation

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

(a) **(8 pts)** Si a est une constante positive réelle, déterminez les énergies et les états propres du système perturbé tel que $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$. Donnez les fonctions d'onde stationnaires des états $|A\rangle$, $|B\rangle$ et $|C\rangle$ en fonction des états propres du système perturbé.

(b) **(6 pts)** Si l'électron se trouve dans l'état $|A\rangle$ au temps $t = 0$. Donnez l'expression de la probabilité de trouver l'électron sur l'atome A lorsque t > 0. Exprimez votre réponse en termes des fonctions cos et sin.

(c) **(6 pts)** Est-ce que pour un temps $t \neq 0$ donné, l'électron se trouve entièrement localisé sur l'atome A ? Si oui, déterminez ce temps, si non dites pourquoi ce n'est pas possible.

QUESTION 3 : PHYSIQUE STATISTIQUE

Nous nous intéressons aux niveaux d'énergie d'un ensemble de molécules diatomiques et considérons 4 degrés de liberté en faisant l'hypothèse que l'énergie totale peut s'écrire :

$$E_{totale} = E_{translation} + E_{électronique} + E_{rotationnelle} + E_{vibrationnelle} = E_t + E_e + E_r + E_v$$

(a) **(4 pts)** Montrer que la fonction de partition peut s'écrire :

$$Z_{totale} = Z_t Z_e Z_r Z_v$$

(b) **(4 pts)** Sachant que l'énergie de l'oscillateur harmonique peut s'écrire $E_v = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, calculer la distribution des états vibrationnels suivant la loi de Maxwell-Boltzmann

(c) **(4 pts)** Sachant que l'énergie de rotation dégénérée $2\ell + 1$ fois peut s'écrire $E_r = \frac{\hbar}{\mu R^2}\left(\ell(\ell + 1)\right)$ où μ est la masse réduite de la molécule et R est la distance interatomique, donner l'expression la fonction de partition.

(d) **(4 pts)** Sous l'hypothèse que $\frac{\hbar}{\mu R^2} \ll k_B T$, on propose de remplacer la somme dans l'expression de la fonction de partition par une intégrale. Montrer que la fonction de partition pour les énergies rotationnelles peut alors être approximée par $\frac{k_B T \mu R^2}{\hbar}$.

(e) **(4 pts)** L'hypothèse initiale que les énergies rotationnelle et vibrationnelle sont indépendantes n'est valide que pour les niveaux vibrationnels près du niveau fondamental (au-delà, l'anharmonicité de puits de potentiel tend à changer la distance interatomique moyenne qui est considérée constante dans le modèle utilisé pour calculer l'énergie rotationnelle). À température pièce et sachant que les transitions d'états vibrationnels sont de l'ordre de 0.1 eV, est-ce que cette hypothèse est généralement respectée?

QUESTION 4 : MÉCANIQUE SUPÉRIEURE

Oscillateurs couplés en torsion.

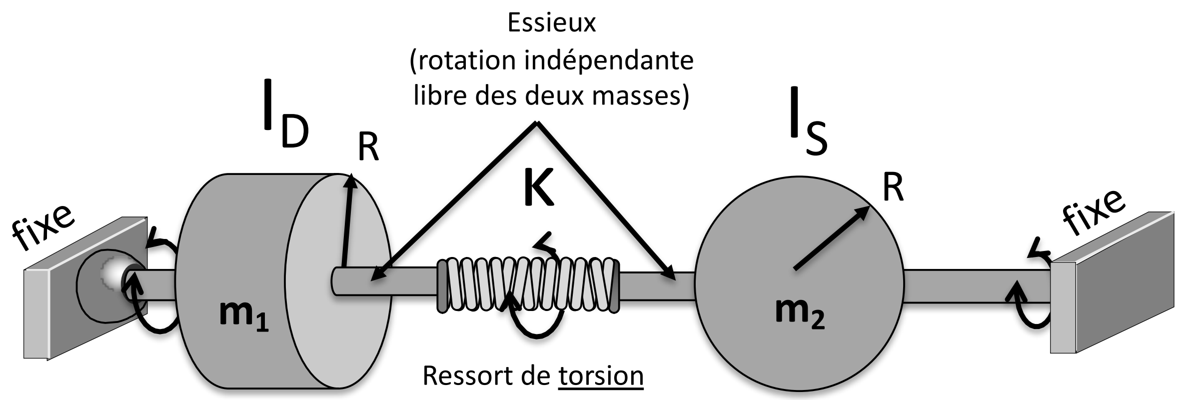


Figure 1 : *Schéma du système mécanique étudié.*

Un disque plein et une sphère pleine de masses respectives m_1 et m_2 et de mêmes rayons *R* sont fixés sur deux demi-essieux sans masse et reliés entre eux par un <u>ressort de torsion</u> de constante de rappel *K*. L'essieu peut tourner librement autour de son axe.

Au temps t = 0, on tient la sphère en place et on fait tourner le disque de 90 degrés autour de l'axe. On laisse ensuite filer le système à partir du repos.

(a) **(4 pts)** Faites un choix de coordonnées généralisées pour étudier ce problème. Décrivez précisément chaque coordonnée ainsi que leur point de référence.

(b) **(8 pts)** Écrire l'hamiltonien du système.

(c) **(4 pts)** Donnez les équations d'Hamilton associées au système.

(d) **(4 pts)** Sachant que l'on peut distribuer une masse totale M sur les deux essieux, tels que $M = m_1 + m_2$. Dans quelles proportions m_1 et m_2 doivent-elles être distribuées pour maximiser la fréquence d'oscillation du système?

Information utile sur le problème :

- *Négligez tout frottement;*
- *Le moment d'inertie d'un disque plein autour de son axe vaut $I_D = ½*mR^2$. Le moment d'inertie d'une sphère pleine vaut $I_S = 2/5*mR^2$.*
- *Un ressort de torsion génère un couple qui est directement proportionnel à son angle de torsion ($M = -K\vartheta$).*
- *Le ressort ne peut se déformer en x et y, uniquement de manière angulaire.*

Note : Toute autre approche est acceptée avec 2 points sur 20 de pénalité.

QUESTION 5 : OPTIQUE PHOTONIQUE 1 (GÉOMÉTRIQUE)

1. **(5 pts) Réfraction** : Lorsque le Soleil se couche, les rayons qui arrivent à nos yeux passent à travers l'atmosphère. À l'aide d'un croquis et d'une explication brève, et avec ce que vous savez de la réfraction de la lumière dans l'atmosphère, expliquez si, oui ou non, la position apparente du Soleil est une mesure adéquate pour évaluer la durée du jour. En d'autres mots, lorsque que nous observons un coucher de Soleil, est-ce que le Soleil est sur, au-dessous ou au-dessus de l'horizon?

2. **La méthode de Bessel** : Pour évaluer la distance focale d'une lentille, f, Bessel a montré qu'on peut placer celle-ci entre un objet et un écran séparés par une grande distance L (i.e. $L > 4f$).

   (a) **(5 pts)** Montrez qu'il existe deux positions de lentille, $x_1$et x_2, pour lesquelles l'image de l'objet sur l'écran sera nette;

   (b) **(5 pts)** Soit D la distance entre , $x_1$et , x_2 : les deux positions pour lesquelles l'image est nette. Montrez que la longueur focale de la lentille est donnée par : $f = \frac{L^2 - D^2}{4L}$;

   (c) **(5 pts)** Proposez à l'aide d'un croquis et d'une brève explication une autre méthode simple pour mesurer la longueur focale d'une lentille.

QUESTION 6 : OPTIQUE PHOTONIQUE 2 (ONDULATOIRE)

Des mesures récentes utilisant des interféromètres optiques de pointe ont montré que les ondes gravitationnelles des trous noirs peuvent être détectées. La technique de détection utilise deux cavités Fabry-Pérot ultra-stables, FP1 et FP2, intégrées dans les deux bras d'un très long interféromètre de Michelson ultra-stable. Ce système est illustré à la Fig.1.

Un laser ultra-stable est utilisé comme source pour le détecteur d'ondes gravitationnelles. La sortie est détectée par un photodétecteur parfait, PD1, qui peut être considéré comme exempt de toute source de bruit de fond ou de bruit photonique.

Dans ce problème, vous pouvez faire les hypothèses suivantes:

- Une onde gravitationnelle arrivant à l'interféromètre n'affecte qu'un seul bras de l'interféromètre tout en laissant l'autre bras intact.
- L'onde provoque une déformation gravitationnelle, ε, définie comme $\delta l/L$, dans un bras, où δl est le changement de la longueur, L, de l'interféromètre.
- L'interférence au niveau du photodétecteur est destructrice avant qu'une onde gravitationnelle ne frappe ce dernier.
- La lumière dans les deux interféromètres FP1 et FP2 subit N allers-retours (avec N = 101) avant de sortir et d'interférer à la photodiode: un aller-retour consiste en un aller de M1 à M2 et un retour à M1 (FP1), et un aller de M3 à M4 suivi par un retour à M3 (FP2).
- La longueur d'onde du laser est de 532 nm.
- Les longueurs de cavité de FP1 et FP2 sont identiques et égales à 5000 m chacune.
- La puissance, P_0, de la source laser est de 121W.
- La réponse de la photodiode est $I = 0,8 \times \delta P$ où δP est la puissance lumineuse détectée.

(a) (**15 pts**) Calculez la variation du courant détecté sur le photodétecteur si la déformation gravitationnelle dans un bras est $\varepsilon = 0,9 \times 10^{-21}$.

(b) (**5 pts**) Calculez le nombre de photons détectés/seconde.

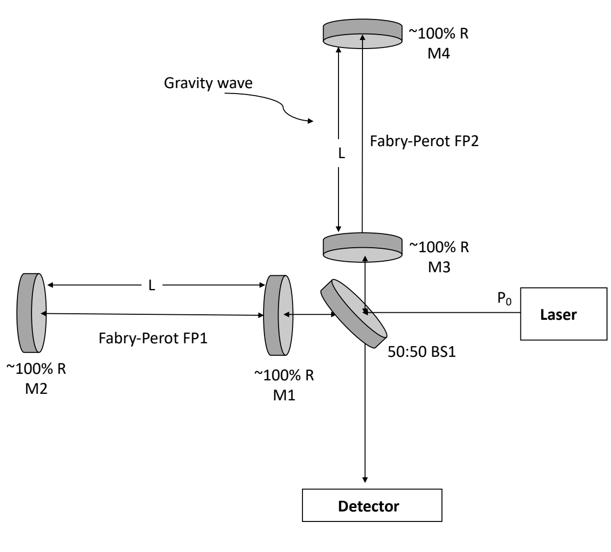


Figure 1. Schéma de deux interféromètres Fabry-Perot intégrés dans un interféromètre de Michelson pour la détection d'ondes gravitationnelles (R: réflectivité, M: miroirs, BS: séparateur de faisceau).

QUESTION 7 : **PHYSIQUE DU SOLIDE 1**

Considérons les modes normaux de vibration d'une chaîne à une dimension d'atomes identiques de masse M dans l'approximation harmonique. Supposons que le couplage entre les atomes n'existe que pour les atomes les plus proches voisins. Ces couplages sont représentés par des ressorts égaux avec constante de force K. Les modes normaux ont le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et la fréquence ω. Supposons également que la chaîne a N atomes et une longueur $L = Na$.

(a) **(5 pts)** Écrire l'équation du mouvement pour les déplacements $\mathbf{u}$ des modes normaux et obtenir les fréquences $\omega(k)$ de ces modes en fonction de l'amplitude du vecteur d'onde $|\mathbf{k}| = k$.

(b) **(3 pts)** Les modes normaux longitudinaux ont $\mathbf{u} \parallel \mathbf{k}$ et les modes transverses $\mathbf{u} \perp \mathbf{k}$. Combien de modes longitudinaux et transversaux existent pour chaque valeur de vecteur d'onde. Pourquoi les modes avec les vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ et $-\mathbf{k}$ sont-ils dégénérés?

(c) **(7 pts)** Montrer que pour les grandes longueurs d'onde, l'équation du mouvement se réduit à une équation d'onde. Quelle est la vitesse du son?

(d) **(5 pts)** Utiliser les conditions aux limites périodiques pour obtenir la densité des états des modes. Combien de modes sont dans la première zone de Brillouin de la chaîne d'atomes?

QUESTION 8 : PHYSIQUE DU SOLIDE 2

Un échantillon semi-conducteur présente une densité de porteurs de charge de 2 x 10^{16} cm^{-3} et une mobilité μ = 80 $cm^2/V \cdot s$.

(a) **(4 pts)** Calculez la conductivité électrique de cet échantillon semi-conducteur.

(b) **(8 pts)** Considérez l'équilibre thermique à température ambiante. Dans cet état, les porteurs de charge sont continuellement piégés dans des sites immobiles et ensuite thermiquement ionisés à nouveau dans des états mobiles. Si la durée de vie moyenne dans un état mobile est de 10^{-5} seconde, quelle est la distance moyenne parcourue par un porteur de charge entre deux pièges successifs?

(c) **(8 pts)** Si les porteurs de charge ont une masse effective égale à 0.1 fois la masse d'un électron libre, quel est le temps moyen entre deux diffusions d'électrons successives?

Remarque:
À température ambiante, $k_B T/e$ = 25 meV.