POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

EXAMEN GÉNÉRAL DE SYNTHÈSE – ÉPREUVE ÉCRITE
Programme de doctorat en génie physique

Jeudi 13 juin 2019

Salle B-418 (pavillon principal)

de 9h30 à 13h30

NOTES :

- Aucune documentation permise.
- Calculatrice électronique non programmable permise.
- Répondre à 6 questions au choix parmi les 8.
- Les questions ont toutes le même poids (20 points).
- Le questionnaire comporte 8 questions et 11 pages.
- Utiliser un cahier différent pour chaque question en prenant soin d'inscrire le numéro de la question sur celui-ci.

Département de génie physique
Pavillon principal
Téléphone : 514-340-4787
Télécopieur : 514-340-3218
Courriel : info@phys.polymtl.ca

Adresse postale
C.P. 6079, succ. Centre-ville
Montréal (Québec) Canada H3C 3A7
www.polymtl.ca

Campus de l'Université de Montréal
2900, boul. Édouard-Montpetit
2500, chemin de Polytechnique
Montréal (Québec) Canada H3T 1J4

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

Formules et relations utiles

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_v^* \Psi_v dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_v^* \Psi_v dy = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} H_v^2(y) e^{-y^2} dy = \alpha \pi^{1/2} 2^v v!$$

v !=v(v-1)(v-2)…

1 u = 931,494 MeV/c^2

<u>CONSTANTES PHYSIQUES</u>

$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C
$m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ Kg
$\hbar = 1.055 \times 10 \times 10^{-34}$ J·s
$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K
$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/M
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A²

<u>ÉQUATIONS PHYSIQUES</u> :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} dV$$

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}$$

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}$$

Relation de Clausius-Mossotti

$$\frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$$

<u>ÉQUATIONS MATHÉMATIQUES</u>

Intégrales

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

Loi des cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$

Approximation de Stirling

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Identité

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Identités trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

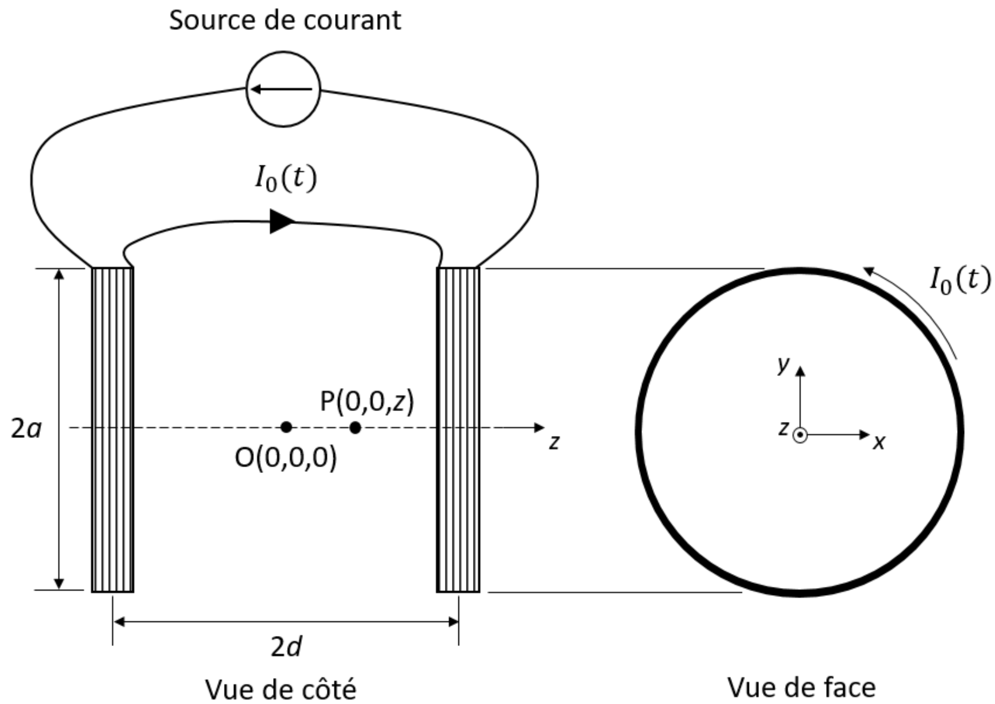
$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

QUESTION 1 : **ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME**

Génération d'un champ magnétique uniforme par des bobines de Helmholtz
Considérez deux bobines de Helmholtz (bobines circulaires) identiques de rayon a ayant chacune N tours de fil. Les bobines sont connectées en série et sont alimentées par une source de courant alternatif d'amplitude I_0. Les bobines sont parallèles et alignées sur l'axe z (voir figure). Les bobines sont entourées d'air ($\varepsilon_r = \mu_r = 1$). On néglige ici l'épaisseur des bobines selon la direction z.

L'objectif est de générer un champ magnétique (presque) uniforme autour du point $O(0,0,0)$ situé sur l'axe des bobines et à égale distance de celles-ci. On peut alors y placer un échantillon afin d'étudier sa réponse magnétique.



a) **(10 points)** Calculez l'amplitude du champ magnétique $\vec{B}$ produit par les deux bobines de Helmholtz en un point $P(0,0,z)$ quelconque situé sur l'axe des bobines.

b) **(5 points)** Démontrez qu'on doit avoir $2d = a$ afin de maximiser l'uniformité du champ magnétique près du point O. Donnez l'expression du module du champ en ce point.
Indice : minimisez la variation spatiale de $\vec{B}$ autour du point O en faisant un développement de Taylor autour du point O :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + O(h^3),$$

et en annulant les dérivées jusqu'à l'ordre 2.

Page suivante

Pour la question suivante, on suppose que $2d = a$. On donne $a = 10$ cm, $N = 10$ et $I_0 = 2$ A.

c) **(5 points)** Estimez l'inductance totale (auto-inductance) des deux bobines de Helmholtz. Pour cela, supposez que la valeur du champ magnétique sur la surface d'une bobine est uniforme et égale à la valeur du champ au centre de la bobine.

***QUESTION* 2** : **MÉCANIQUE QUANTIQUE**

a) **(4 points)** Démontrer qu'en une dimension, pour un potentiel pair (V(x)=V(-x)), les fonctions d'ondes de l'équation de Schrödinger indépendante du temps sont soit paires ou impaires pour une énergie donnée.

b) **(6 points)** Calculer les fonctions d'onde et les énergies associées pour une particule dans un puits de potentiel infini centré en 0 de largeur a. Est-ce cohérent avec la réponse de la question a?

c) **(2 points)** Calculer la position moyenne pour l'état fondamental n = 1.

d) **(6 points)** Calculer la position moyenne en fonction du temps pour un état qui, au temps t = 0, est une combinaison linéaire à coefficients (réels) égaux des états n = 1 et n = 2.

e) **(2 points)** Trouver une relation exprimant la fréquence de la position moyenne et la taille du puits.

QUESTION 3 : **PHYSIQUE STATISTIQUE**

Boîtes quantiques

Les boîtes quantiques sont utilisées en optoélectronique et considérées comme une des technologies prometteuses pour la mise au point d'un ordinateur quantique. Ce sont des cristaux nanométriques composés de matériaux semi-conducteurs déposés sur un substrat. Elles confinent les électrons en trois dimensions à une échelle nanométrique. Ici, nous utiliserons un modèle simplifié pour analyser les propriétés thermodynamiques de ces boîtes (voir figure 1). Nous supposerons donc qu'à une température $T = 0$ °K, deux électrons se retrouvent dans le niveau de valence du cristal d'énergie $\varepsilon_\mathrm{v} = -0.2$ eV (ε_v est l'énergie minimale de la bande de valence). Nous prendrons aussi pour acquis qu'à cette température le niveau de conduction, d'énergie minimale $\varepsilon_\mathrm{c} = 0.1$ eV, est inoccupé.

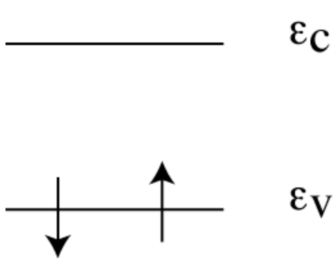


Figure 1. Configuration électronique simplifiée d'une boîte quantique.

Les questions auxquelles vous devrez répondre sont les suivantes.

a) **(5 points)** Déterminez le nombre d'électrons dans chacun des niveaux d'énergie en fonction de la température T et du potentiel chimique μ.

b) **(5 points)** Montrez, en utilisant le principe de conservation du nombre total d'électrons dans le système, que le potentiel chimique μ est indépendant de la température.

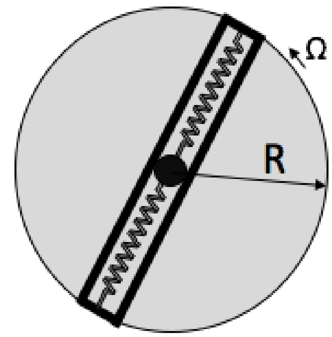
c) **(5 points)** Montrez que le nombre moyen d'électrons dans le niveau de conduction dépend seulement de $\varepsilon_\mathrm{v} - \varepsilon_\mathrm{c}$ et de T. Évaluez cette population à T=300 °K.

d) **(5 points)** Évaluez l'énergie moyenne des électrons dans ce système lorsque la température est de 1000 °K.

Notez que la constante de Boltzmann vaut $k_B = 8.617 \times 10^{-5}$ eV/ °K.

QUESTION 4 : **MÉCANIQUE SUPÉRIEURE**

Système masse-ressort tournant



Un système masse ressort est composé d'une bille de masse *m* enfermée dans un tube rigide à laquelle sont attachés deux ressorts identiques de constante de rappel *k* et de longueur au repos négligeable (schéma ci-contre). Le tube est fixé solidement à un plaque rotative placée à l'horizontale (comme un tourne-disque). On écarte légèrement la bille de sa position d'équilibre et on observe l'oscillation du système.

A) **(5 points)** Déterminez la période des oscillations de la bille, dans le cas où la plaque circulaire est immobile, en fonction des paramètres du système.

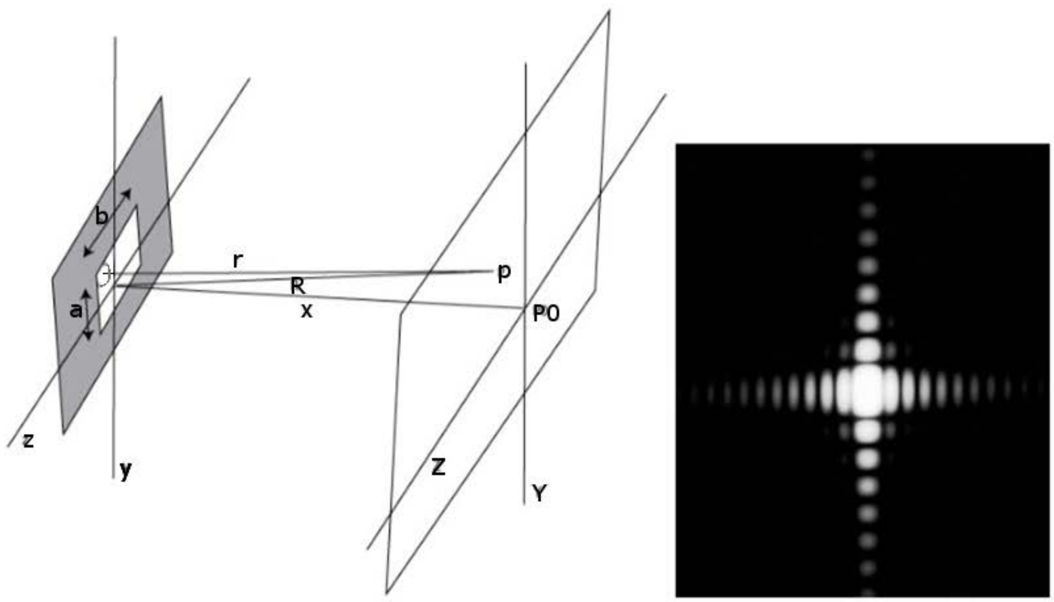
B) **(10 points)** On imprime maintenant une vitesse angulaire constante Ω à la plaque. Déterminez l'énergie cinétique et potentielle de la bille pour toute position radiale r de la bille en prenant le centre du disque pour origine. En déduire le lagrangien du système.

C) **(3 points)** Déterminez la nouvelle période des oscillations de la bille en fonction des paramètres du système et de la vitesse angulaire imposée.

D) **(2 points)** En supposant une masse *m* = 100 g et un ressort de constante de rappel *k* = 1 N/m, calculez la vitesse angulaire requise pour que le système cesse d'osciller.

QUESTION 5 : **OPTIQUE PHOTONIQUE 1**

Un faisceau laser traverse, depuis la gauche (dans la direction $+\hat{x}$), une ouverture rectangulaire de largeur *a* (dans la direction *y*) et de longueur b (dans la direction z), avec $b > a$ (voir figure). L'émission laser de longueur d'onde λ est monochromatique et son intensité est uniforme sur toute l'ouverture. La lumière qui passe à travers de l'ouverture est projetée sur un écran à une très grande distance $x \gg (a, b, \lambda)$ de l'ouverture et du laser. Les coordonnées sur l'écran sont définies par les coordonnées cartésiennes (Y, Z), ou angulaires $(\theta_Y \approx Y/x, \theta_Z \approx Z/x)$ mesurées par rapport à l'axe $\hat{x}$.



(a) **(4 points)** L'image de droite de la figure est l'intensité $I(\theta_Y, \theta_Z)$ mesurée sur l'écran. Quelle direction de la figure d'intensité correspond à l'axe Y, et laquelle correspond à l'axe Z? (Exemple de réponse: la direction verticale de la figure d'intensité correspond à l'axe Y) Justifiez votre réponse.

(b) **(4 points)** De quelle manière la distribution angulaire de l'intensité $I(\theta_Y, \theta_Z)$ change si la distance entre l'écran et l'ouverture est doublée? Justifiez votre réponse.

(c) **(4 points)** Comment changerait la distribution d'intensité mesurée $I(\theta_Y, \theta_Z)$ si la longueur d'onde λ de la lumière émise par le laser est deux fois plus grande? Justifiez brièvement votre réponse.

(d) **(8 points)** Calculez la distribution d'intensité $I(\theta_Y, \theta_Z)$ en fonction des angles θ_Y, θ_Z et normalisée à l'intensité $I(0)$ au centre de l'écran. *Indice: Ne pas se soucier de l'amplitude constante du champ électrique ou de l'intensité avant la fin de la dérivation.*

__QUESTION 6__ : **OPTIQUE PHOTONIQUE 2**

Optique : Mesure de coefficient thermo-optique

Le montage expérimental montré à la figure 1 permet de mesurer le coefficient thermo-optique de liquides. Le montage comprend une source (S) de lumière diffuse, un prisme triangulaire, une lentille convergente (L) et un écran d'observation placé à la distance focale de la lentille. Le liquide à tester est versé dans une cuve (en gris sur la figure) de telle sorte que la surface diagonale du prisme est entièrement recouverte du liquide. Le prisme est fait d'un verre de haut indice $n = 1{,}9$. On remplit la cuve d'eau dont l'indice est de $n = 1{,}333$ à 20 ℃.

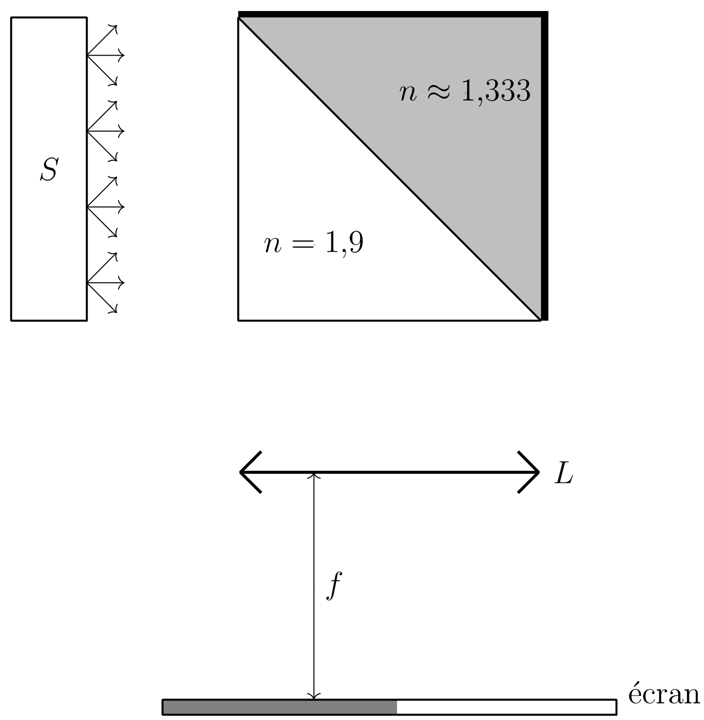


Figure 1 : Système de mesure de coefficient thermo-optique.

1. **(6 points)** On observe à l'écran une région claire et une région plus sombre. Expliquez l'origine de ce contraste. Indiquez votre raisonnement et ajoutez des calculs si nécessaire.

2. **(7 points)** On modifie maintenant la température du liquide. Décrivez comment varie l'observation faite à l'écran.

3. **(7 points)** Donnez une procédure permettant de quantifier le coefficient thermo-optique $C = \frac{1}{n}\frac{dn}{dT}$.

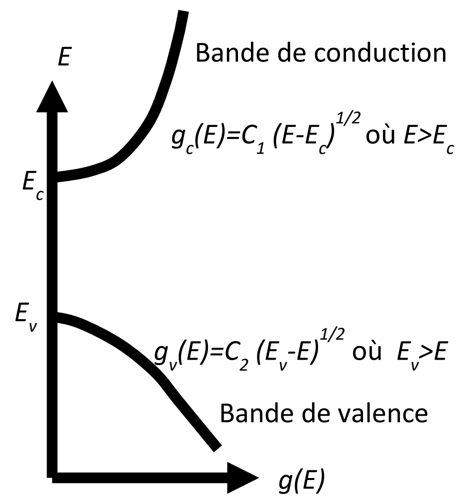
QUESTION 7 : **PHYSIQUE DU SOLIDE 1**

Considérez un semi-conducteur faiblement dopé. Soient les densités d'états de la bande de conduction et de la bande de valence données par :

$g_c(E)=C_1\,(E-E_c)^{1/2}$ pour la bande de conduction, (où $E>E_c$)

$g_v(E)=C_2\,(E_v-E)^{1/2}$ pour la bande de valence. (où $E_v>E$)

Où C_1 et C_2 sont des constantes ne dépendant que des caractéristiques du semi-conducteur et de la température T. E_c et E_v sont respectivement le minimum de la bande de conduction et le maximum de la bande de valence. On dénote le niveau de Fermi par E_F. Faire l'hypothèse que :…$E_c-E_F \gg K_BT$ et $E_F-E_v \gg K_BT$. (Note : $k_BT= 0.025\ eV$ à $T=300K$)



a) **(10 points)** Déterminez l'expression de la concentration des électrons n dans la bande de conduction en fonction de k_B, T, C_1, E_c, E_F et l'expression de la concentration des trous p dans la bande de valence en fonction de k_B, T, C_2, E_v, E_F . Il y aura une intégrale définie sans dimension dans ces deux expressions que vous n'avez pas à évaluer.

b) **(2 points)** Montrez que le produit np est proportionnel à $exp(-E_g/k_BT)$, ou E_g est la largeur de la bande interdite $E_c–E_v$ (*Gap*).

c) **(8 points)** Le silicium est dopé avec une faible concentration de donneurs $N_D= 10^{15}\ cm^{-3}$.
   (i) En faisant les hypothèses appropriées, estimez les concentrations d'électrons et de trous à $T=300K$.
   (ii) En faisant l'hypothèse que $C_1 \approx 2C_2$, estimez la position du niveau de Fermi E_F par rapport au milieu de la bande interdite.

Pour le silicium : Densité atomique : $5 \times 10^{22}\ cm^{-3}$
Concentration intrinsèque: $1.45 \times 10^{10}\ cm^{-3}$ à $T=300K$
$E_g= 1.11eV$ à $T=300K$

QUESTION 8 : **PHYSIQUE DU SOLIDE 2**

Échauffement d'un fil de platine

On s'intéresse à la mesure de la résistance électrique d'un fil de platine (Pt) comme senseur de température dans le régime des hautes températures. On admet que le fil possède une résistivité ρ_0 = 10 $\mu\Omega$–cm à la température T_0 = 25 °C, et que celle-ci varie de façon linéaire avec la température suivant l'expression

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)],$$

où α = 3,85 x 10^{-3} °C^{-1} entre -200 et 700 °C. Nous voulons cependant nous assurer que le courant qui circule dans le fil ne produit pas un échauffement du fil à cause de la puissance dissipée par effet Joule.

Le fil de platine de 100 μm de diamètre et de longueur 10 cm est soumis à une tension V de 1 mV pendant 10 secondes. Si on néglige le refroidissement du fil (émission de chaleur par la surface), l'équation décrivant l'évolution de la température s'écrit

$$MC\frac{dT}{dt} = \frac{V^2}{R}.$$

où M est la masse du fil, C sa chaleur spécifique et R sa résistance électrique. On admet que la chaleur spécifique dans la plage de température d'intérêt (500 à 700 °C) est dominée par la contribution du réseau (phonons). Selon le modèle de Debye, l'énergie interne d'un solide de N atomes est

$$U = 9Nk_B\frac{T^4}{\theta_D^3}\int_0^{\theta_D/T}\frac{x^3}{e^x - 1}dx.$$

On admet que le platine a une densité massique de 21.45 g/cm^3, une masse atomique de 195,1 u et une température de Debye de 240 K. À partir des équations et des données de l'énoncé :

a) **(5 points)** Déterminer une expression approximative pour l'élévation de température du fil en fonction de V, M, R, C et du temps en supposant que les paramètres M, C et R sont indépendant de la température.

b) **(5 points)** Déterminer une expression approximative pour la chaleur spécifique (J/kg°C) pour des températures élevées par rapport à la température de Debye (Loi de Dulong et Petit).

c) **(8 points)** Calculer la valeur numérique de l'élévation de température par effet Joule à 600 °C.

d) **(2 points)** Discuter brièvement, à partir des résultats obtenus en c), si l'approximation des paramètres indépendants de la température utilisée en a) est raisonnable.