POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL
LE GÉNIE
EN PREMIÈRE CLASSE

EXAMEN GÉNÉRAL DE SYNTHÈSE – ÉPREUVE ÉCRITE
Programme de doctorat en génie physique

Jeudi 23 novembre 2017

Salle B-406

de 9h30 à 13h30

NOTES :

- Aucune documentation permise.
- Calculatrice électronique non programmable permise.
- Le candidat répond à 6 questions de son choix sur les 8.
- Les questions ont toutes le même poids (20 points).
- **Utiliser un cahier différent pour chaque question en prenant soin d'inscrire le numéro de la question sur celui-ci.**
- Le questionnaire comporte 8 questions et 10 pages.

Département de génie physique
Pavillon principal
Téléphone : 514-340-4787
Télécopieur : 514-340-3218
Courriel : info@phys.polymtl.ca

Adresse postale
C.P. 6079, succ. Centre-ville
Montréal (Québec) Canada H3C 3A7
www.polymtl.ca

Campus de l'Université de Montréal
2900, boul. Édouard-Montpetit
2500, chemin de Polytechnique
Montréal (Québec) Canada H3T 1J4

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

Formules et relations utiles

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_v^* \Psi_v dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_v^* \Psi_v dy = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} H_v^2(y) e^{-y^2} dy = \alpha \pi^{1/2} 2^v v!$$

v !=v(v-1)(v-2)…

1 u = 931,494 MeV/c^2

CONSTANTES PHYSIQUES

$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C

$m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ Kg

$\hbar = 1.055 \times 10 \times 10^{-34}$ J·s

$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K

$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/M

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

ÉQUATIONS PHYSIQUES :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} dV$$

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}$$

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}$$

Relation de Clausius-Mossotti

$$\frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$$

ÉQUATIONS MATHÉMATIQUES

Intégrale

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

Loi des cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Approximation de Stirling

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Identité

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Identités trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

QUESTION 1 : ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

Électricité et magnétisme : Piège de Penning

Le piège de Penning est utilisé pour confiner des particules chargées dans une chambre à vide. On s'en sert entre autres, pour stocker des anti-particules telles que les anti-protons. Le piège comprend un quadripôle électrique pour le confinement axial. On s'intéresse ici aux propriétés de ce quadripôle près de son centre.

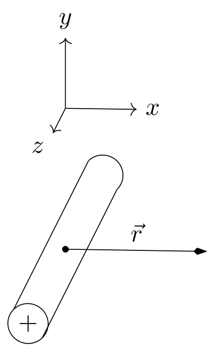


Figure 1: Fil infini chargé uniformément.

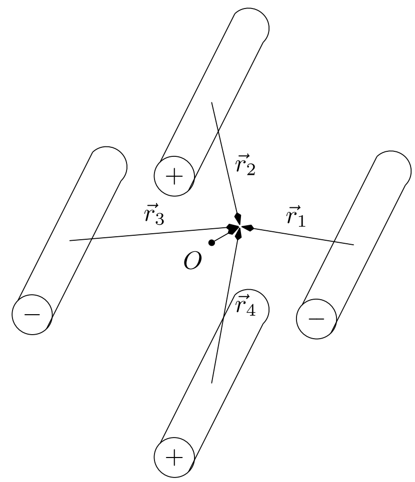


Figure 2: Quadripole formé par quatre fils traversant le plan $z = 0$. Tous les vecteurs montrés ainsi que l'origine se trouvent dans ce plan.

1) **(5 points)** Donner l'expression pour le champ électrique à une distance $|\vec{r}|$ d'un fil unique infini chargé uniformément avec une densité linéïque de charges λ, tel que représenté à la figure 1.
2) **(5 points)** Donner une expression pour le champ électrique en tout point sur un plan xOy à $z = 0$, en fonction de sa position relative aux quatre fils $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ et $\vec{r}_4$, tel que représenté à la figure 2.
3) **(5 points)** Tracer un diagramme représentant qualitativement les lignes de champ électrique dans le plan xOy près du centre du quadripôle.
4) **(5 points)** On définit un système de coordonnées cartésiennes $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ dont l'origine se trouve au centre du quadripôle à une distance R de chaque fil. Trouver une expression pour le champ électrique $\vec{E}(x, y)$ valide tout près de l'origine, en faisant un développement limité au premier ordre en x et y.

On donne le développement limité suivant.

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - \cdots$$

$$|\hat{x}| = 1 \quad |\hat{y}| = 1$$

***QUESTION* 2** : **MÉCANIQUE QUANTIQUE**

L'état $2s$ ($n=2,\ \ell=0,\ m_\ell=0$) et l'état $2p$ ($n=2,\ \ell=1,\ m_\ell=0$) de l'électron dans l'atome d'hydrogène respectivement sont définis par les fonctions d'onde suivantes :

état $2s$:

$$\psi_{2s}(r,\theta,\varphi)=A_o\left(2-\frac{r}{a_o}\right)e^{-\left(\frac{r}{2a_o}\right)}$$

état $2p$:

$$\psi_{2p}(r,\theta,\varphi)=\left[\frac{1}{2\sqrt{6}\,a_o^{3/2}}\left(\frac{r}{a_o}\right)e^{-\left(\frac{r}{2a_o}\right)}\right]\left[\frac{\sqrt{6}}{2}\cos(\theta)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$$

Sachant que a_o est le rayon de Bohr, on vous demande :

a) **(5 points)** D'expliquer brièvement la méthodologie qu'on peut utiliser pour résoudre l'équation de Schrödinger et ainsi obtenir les fonctions d'ondes précédentes ;

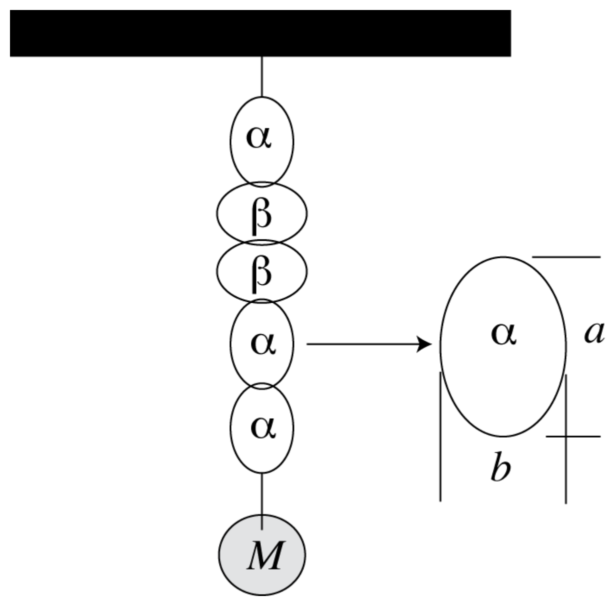
b) **(5 points)** De calculer la valeur du terme A_o de la fonction d'onde correspondante à l'état $2s$; vous devez justifier les démarches employées pour effectuer vos calculs ;

c) **(5 points)** D'estimer la position la plus probable par rapport au noyau, où on peut repérer l'électron quand il se trouve dans l'état $2p$;

d) **(5 points)** D'identifier et d'expliquer les états de dégénérescence de l'électron quand il est représenté par les fonctions d'onde $\psi_{2s}(r,\theta,\varphi)$ et $\psi_{2p}(r,\theta,\varphi)$.

QUESTION 3 : **PHYSIQUE STATISTIQUE**

Une chaîne verticale, au bout de laquelle est suspendu un poids de masse M, est composée de N maillons sans masse (on supposera ici que N est très grand). Cette chaîne est attachée à un support par une de ses extrémités (voir la figure ci-dessous).



Chaque maillon, de forme elliptique, peut se retrouver dans une de deux configurations possibles, notées α et β de longueurs respectives a et b qui correspondent aux axes majeurs et mineurs de l'ellipse. L'énergie de ce système est d'origine gravitationnelle et donnée par $E = MgL$ où Mg est la force gravitationnelle exercée par le poids sur la chaîne et L sa longueur.

a) **(8 points)** Donnez une expression pour l'entropie $S(E, N)$ de cette chaîne.

b) **(8 points)** Calculez la température statistique associée à cette chaîne.

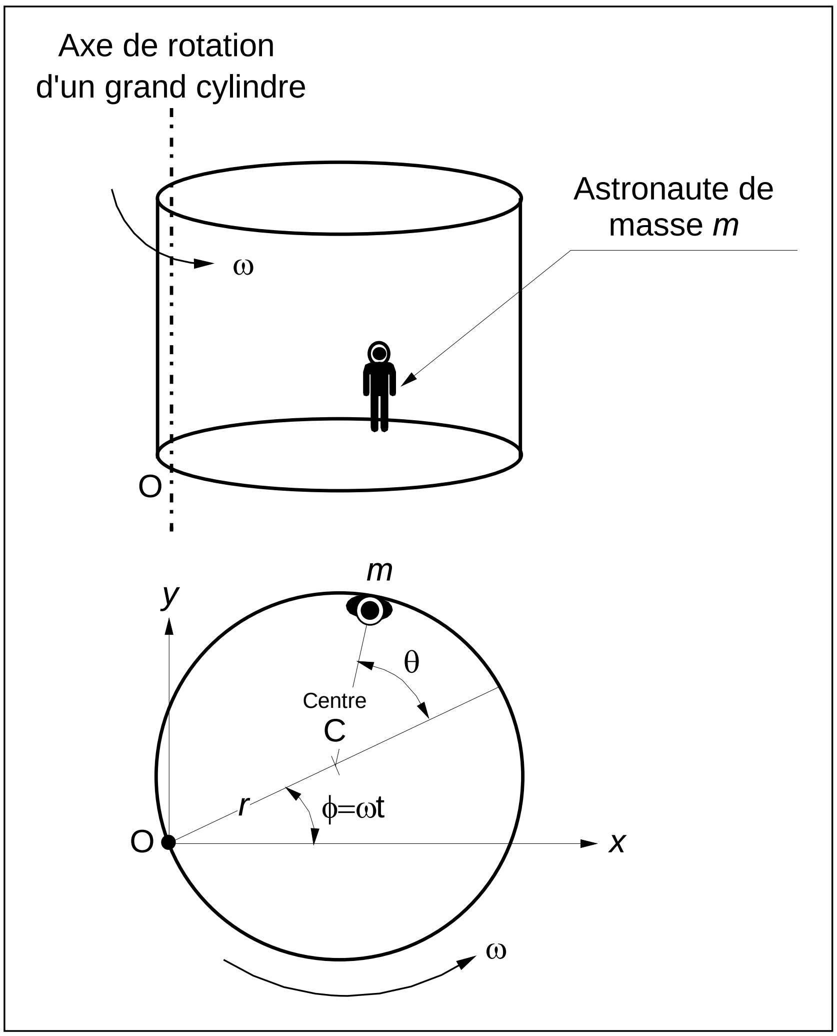
c) **(4 points)** Déterminez l'énergie de cette chaîne ainsi que le nombre de maillons se retrouvant dans l'état α à très haute température ($T \to \infty$).

QUESTION 4 : MÉCANIQUE SUPÉRIEURE

Pour préparer les astronautes à effectuer un voyage de très longue durée vers la planète Mars, un ingénieur physicien a proposé d'utiliser un vaisseau cylindrique de grande taille, tournant de manière excentrique avec une vitesse angulaire ω par rapport à un axe, tel que montré dans la figure ci-dessous. En supposant qu'un astronaute placé verticalement peut glisser contre la paroi du cylindre sans frottement et que ses dimensions sont beaucoup plus petites que celles du dispositif (c.-à-d. qu'il peut être considéré comme une petite particule de masse m), on vous demande :

a) **(12 points)** De déterminer l'équation de mouvement de l'astronaute en fonction de θ (voir la figure) en utilisant le formalisme de Lagrange;

b) **(8 points)** De démontrer que l'astronaute sera assujetti à un mouvement harmonique équivalent à celui d'un pendule ayant une longueur $r = g/\omega^2$ (g = accélération de la gravité).

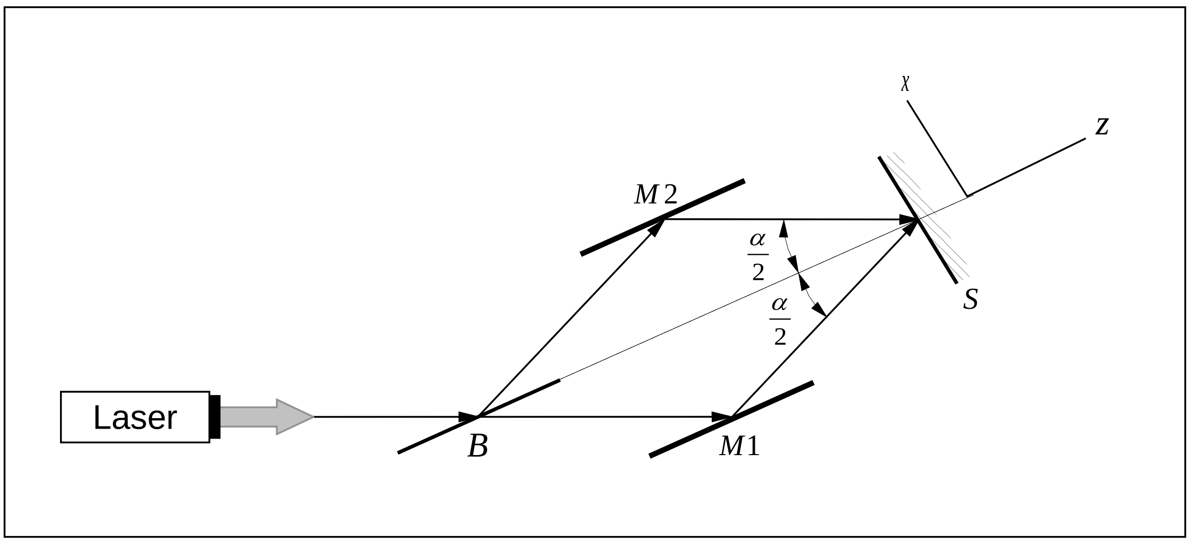


QUESTION 5 : OPTIQUE PHOTONIQUE 1

Un faisceau lumineux large et non-divergent d'une source laser de longueur d'onde, λ, est divisé en deux en utilisant un séparateur de faisceau (B) de 50% de réflexion, puis rassemblé avec deux miroirs, M1 et M2, suivant les indications de la fig. 1. Un écran vertical par rapport à la page, S, est placé dans le plan de l'intersection tel que la normale à l'écran est la bissectrice de l'angle α de convergence des deux rayons.

1. **(15 points)** Trouvez une expression pour la période des franges d'interférence (c.-à-d. la distance entre les régions lumineuses de l'interférence) vues sur l'écran, .

2. **(5 points)** Si la longueur d'onde du laser est de 500 nanomètre et l'angle, α = 36 degrés, calculez la période de l'interférence.



QUESTION 6 : **OPTIQUE PHOTONIQUE 2**

(a) **(10 points)** Une expérience d'interférence de Young est préparée telle qu'illustrée sur la figure ci-dessous. Les fentes sont éclairées avec un faisceau de lumière cohérente collimé de longueur d'onde λ = 600 nm. Lorsqu'une plaque mince constituée d'un matériau diélectrique transparent est placée derrière une des fentes (à une très petite distance $<\lambda/2$), la frange d'ordre zéro se déplace vers la position précédemment occupée par la frange lumineuse de 4^e ordre.

Vous devez trouver l'épaisseur de la plaque mince dont la permittivité relative est de $\varepsilon_r = 5$.

(b) **(10 points)** Vous devez maintenant considérer le même système, mais cette fois avec la plaque mince retirée. Vous devez dessiner le patron d'interférence sur l'écran pour un système composé de deux fentes identiques ayant une largeur **a** et séparées par une distance centre-à-centre **g** lorsque **g** / **a** = 5.

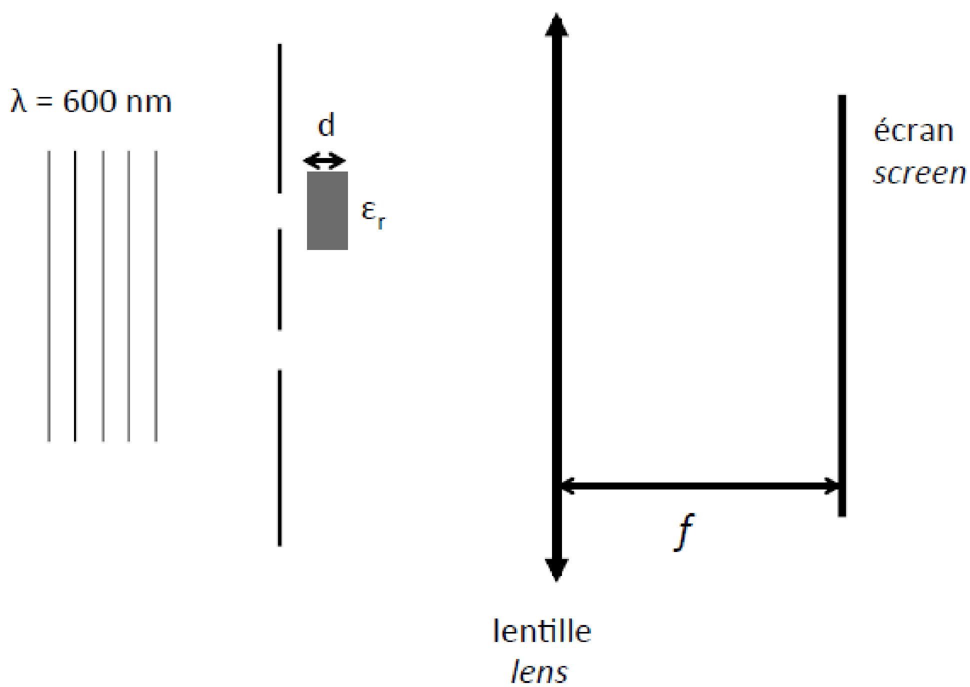


Figure caption:
Sytème utilisé afin d'observer un patron d'interférence sur l'écran à travers une lentillle.

QUESTION 7 : **PHYSIQUE DU SOLIDE 1**

Le silicium (Si) est un semiconducteur de bande interdite indirecte ayant une structure cristalline de type diamant.

I. (5 points) Structure :

I.1. Tracer la maille du silicium et indiquer les points de la symétrie d'inversion.

I.2. Trouver la densité atomique du silicium sachant que son paramètre de maille est 0.543 nm.

I.3. L'étude détaillée des défauts ponctuels dans le silicium indique une énergie de formation de lacunes de l'ordre de 1.0 eV. Trouver à quelle température la concentration des lacunes est égale à 5×10^{12} cm^{-3}.

II. (5 points) Propriétés optiques:

Le silicium possède des modes acoustiques et optiques dans son spectre de phonons. Ses modes optiques ne sont pas IR-actifs (i.e., la radiation IR n'excite pas ces phonons). Expliquer pourquoi.

III. (10 points) Propriétés électroniques:

On considère une jonction p-n à base de silicium.

III.1. Calculer le potentiel de diffusion de la jonction à 300K sachant que: la résistivité du silicium est de 1 Ω cm; la mobilité des électrons μ_n = 1400 cm^2 V^{-1} s^{-1}; la mobilité des trous $\mu_p = \mu_n /3,1$; n_i = 1,05 × 10^{10} cm^{-3}.

III.2. Calculer la largeur de la région de transition quand la jonction est soumise à une tension V = -10 V; 0 V; 0,3 V.

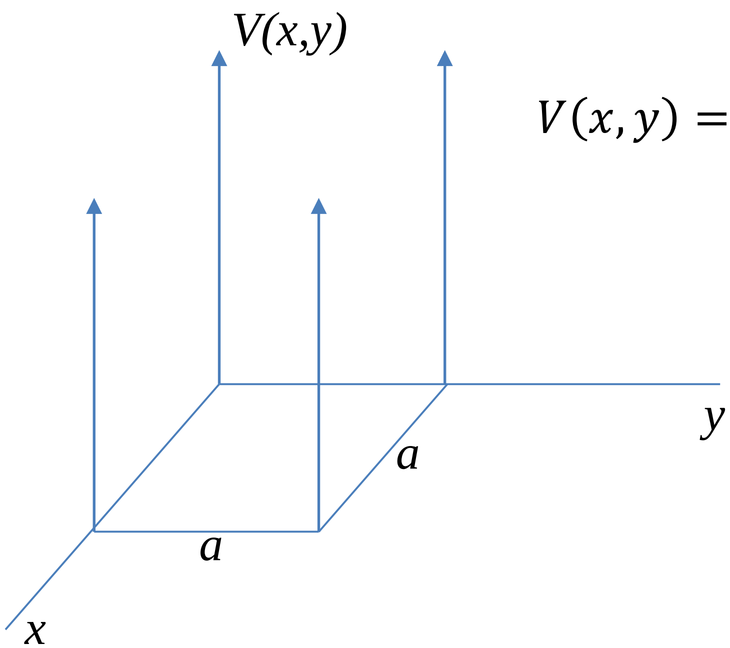
III.3. Calculer le champ électrique maximal dans les régions de transition calculées dans (III.2). Comparer ces valeurs avec la valeur du champ électrique d'un donneur: $E = \frac{e}{\varepsilon\times a_B^2}$, où le rayon de Bohr $a_B = \frac{\varepsilon\bar{h}^2}{m_n^2 e^2}$ et $\frac{m_n}{m_0} = 0,33$.

Constantes utiles:

h = 6,62 10^{-34} m^2 kg s^{-1}; m_0 = 9,11 10^{-31} kg; La permittivité du vide = 8,85 10^{-12} F/m; La constante diélectrique du Si = 11,9.

QUESTION 8 : **PHYSIQUE DU SOLIDE 2**

Question : Gaz d'électrons libres



$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a,\ 0 < y < a \\ \infty & x \le 0, x \ge a, y \le 0, y \ge a \end{cases}$$

Considérez un électron unique dans un puits de potentiel bidimensionnel infini, carré, de largeur a.

a) **(6 pts)** Déterminez les états propres. Montrez sur un schéma les états quantiques autorisés dans un quadrant de l'espace $\vec{k}$. Indiquez l'état fondamental de l'électron sur le diagramme. Quelle est l'énergie de cet état ?

Considérez maintenant N électrons dans la même boîte.

b) **(3 points)** Décrivez le principe que vous devez utiliser et les simplifications à faire pour calculer analytiquement la distribution électronique qui en résulte. Écrivez (aucune dérivation requise) l'expression de la distribution et identifiez chaque terme.

c) **(4 points)** Sur un schéma similaire à celui obtenu à la question (a), montrez quels états sont occupés si le nombre total d'électrons dans la boîte est $N = 16$. Supposez que $T = 0$ K. Quelle est la différence d'énergie entre l'état occupé de plus haute énergie et celui de plus basse énergie. Quelle est cette différence pour N très grand ?

d) **(5 points)** Déterminez la densité d'états $D(E)$ pour N très grand.

e) **(2 points)** Toujours pour N très grand, tracez l'allure de la densité d'états occupés à $T = 0$ K et à une température quelconque T > 0. Indiquez sur le schéma les échelles d'énergie pertinentes.