POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

EXAMEN GÉNÉRAL DE SYNTHÈSE – ÉPREUVE ÉCRITE
Programme de doctorat en génie physique

Jeudi 22 novembre 2018

Salle B-530.3

de 9h30 à 13h30

NOTES :

- Aucune documentation permise.
- Calculatrice électronique non programmable permise.
- Le candidat répond à 6 questions de son choix sur les 8.
- Les questions ont toutes le même poids (20 points).
- **Utiliser un cahier différent pour chaque question en prenant soin d'inscrire le numéro de la question sur celui-ci.**
- Le questionnaire comporte 8 questions et 10 pages.

Département de génie physique
Pavillon principal
Téléphone : 514-340-4787
Télécopieur : 514-340-3218
Courriel : info@phys.polymtl.ca

Adresse postale
C.P. 6079, succ. Centre-ville
Montréal (Québec) Canada H3C 3A7
www.polymtl.ca

Campus de l'Université de Montréal
2900, boul. Édouard-Montpetit
2500, chemin de Polytechnique
Montréal (Québec) Canada H3T 1J4

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

Formules et relations utiles

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_v^* \Psi_v dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_v^* \Psi_v dy = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} H_v^2(y) e^{-y^2} dy = \alpha \pi^{1/2} 2^v v!$$

v !=v(v-1)(v-2)…

1 u = 931,494 MeV/c^2

CONSTANTES PHYSIQUES

$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C
$m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ Kg
$\hbar = 1.055 \times 10 \times 10^{-34}$ J·s
$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K
$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/M
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

ÉQUATIONS PHYSIQUES :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} dV$$

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}$$

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}$$

Relation de Clausius-Mossotti

$$\frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$$

ÉQUATIONS MATHÉMATIQUES

Intégrales

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

Loi des cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Approximation de Stirling

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Identité

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Identités trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

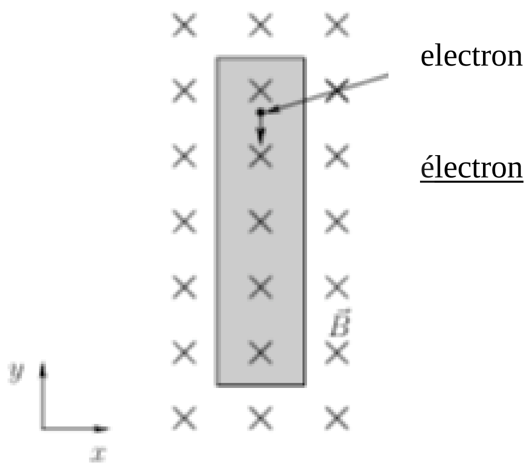
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

QUESTION 1 : ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

Une expérience cruciale qui a contribué à l'établissement de la théorie de la conduction électrique dans les métaux est basée sur un phénomène lié au magnétisme et à la capacité des champs magnétiques d'interagir avec les charges.

Considérons la plaque métallique de la figure ci-dessous (longueur infinie dans la direction y) qui est traversée par un courant I dans la direction négative de l'axe des y dont les électrons se déplacent avec la vitesse v_d. Soit d la largeur de la plaque (le long de l'axe x) et δ son épaisseur.



1. **(5 points)** Indiquez qualitativement - en traçant un schéma - si et comment les électrons générant le courant électrique I sont déviés, si cet écart conduit à la génération d'un champ électrique et, si oui, dans quelle direction.

2. **(5 points)** Après un certain temps, une situation d'équilibre est établie. Décrivez avec les équations appropriées l'équilibre des forces.

3. **(5 points)** Dans le cadre de ce problème, proposez une approche pour calculer la densité des électrons, n.

4. **(2 points)** Determinez v_d et n dans le cas suivant: d = 1 cm, δ = 10 µm, longueur 4 cm, I = 3 A, B = 1.5 T et V_H = 10 µV.

5. **(3 points)** Discutez de l'effet de la largeur de la plaque et de la trajectoire de l'électron (déterminée par l'intensité du champ magnétique !) sur la possibilité de détecter un champ électrique (voir point 1).

QUESTION 2 : MÉCANIQUE QUANTIQUE

Considérer une particule de masse *m,* sous l'effet du champ gravitationnel de la terre. On considère un mouvement unidimensionnel selon l'axe *z* et un potentiel infini sous le niveau de la terre ($z = 0$). La constante d'accélération normale de la pesanteur terrestre est donnée par *g*.

a) **(5 points)** Écrire l'Hamiltonien décrivant le mouvement de la particule

considérer la fonction d'onde suivante pour la particule :

$$\begin{aligned} \psi(z) &= ze^{-az}, \quad z>0 \\ &0, \quad z\leq 0 \end{aligned}$$

où *a* est une constante;

b) **(5 points)** Normaliser cette fonction d'onde;

c) **(5 points)** Calculer l'énergie moyenne de la particule;

d) **(5 points)** Estimer l'énergie de l'état fondamental en minimisant l'expression trouvée en c) par rapport au paramètre *a*.

Intégrales possiblement utiles

$$\int xe^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)$$

$$\int x^2e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)$$

$$\int x^3e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^3}{a}-\frac{3x^2}{a^2}+\frac{6x}{a^3}-\frac{6}{a^4}\right)$$

QUESTION 3 : **PHYSIQUE STATISTIQUE**

Un système est constitué de *N* particules qui peuvent se trouver dans deux états d'énergie ($\varepsilon_1 = +\varepsilon$ et $\varepsilon_2 = -\varepsilon$). En supposant que la masse volumique de ce système est suffisamment faible (c.-à-d. qu'il n'y a pas d'interactions entre les particules) et que les particules sont indiscernables, on vous demande :

a) **(8 points)** D'exprimer l'énergie interne du système en fonction de sa température;

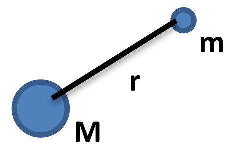
b) **(6 points)** De trouver une expression pour le calcul de la chaleur massique à volume constant;

c) **(6 points)** D'analyser et d'expliquer le comportement physique de la chaleur massique à volume constant en fonction de la température.

Note : Pour effectuer vos calculs, vous pouvez utiliser la définition suivante : $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$.

QUESTION 4 :   **MÉCANIQUE SUPÉRIEURE**

Imaginez une particule test de masse m, en orbite autour d'un objet cosmologique de masse M ($M >> m$).



(a) **(4 points)** En restant en mécanique newtonienne et en négligeant tout mouvement de M, écrivez les lois de conservation de l'énergie (E) et du moment cinétique (L) de ce système en utilisant les coordonnées polaires (r, θ).

(b) **(3points)** En réécrivant la partie (a) sous la forme

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{eff}(r) \qquad \left(\dot{r} = \frac{dr}{dt}\right)$$

dérivez la formule du potentiel effectif $U_{eff}(r)$.

(c) **(3points)** En supposant la forme suivante de $U_{eff}(r)$:

$$U_{eff}(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \alpha\frac{L^2}{mr^3}$$

avec α un paramètre externe, déterminez le rayon d'une orbite circulaire pour le cas de Kepler (α = 0).

(d) **(4 points)** Pour la forme de $U_{eff}(r)$ définie dans la partie (c), avec α = 1, trouvez une limite pour le moment cinétique L, en dessous de laquelle aucune orbite circulaire n'est possible. Donnez les valeurs de L pour lesquelles il existe deux orbites circulaires.

(e) **(3 points)** Tracez un graphique de $U_{eff}(r)$ dans le cas α = 1, pour $L^2 < 12GMm^2$ et pour $L^2 > 12GMm^2$.

(f) **(3 pts)** Décrivez qualitativement les orbites possibles dans la partie (c).

QUESTION 5 : **OPTIQUE PHOTONIQUE 1**

Une cavité Fabry-Pérot de longueur, *L*, est composée de deux miroirs avec une réflectivité respective de 100% et 98%. La cavité est entièrement remplie d'un matériau qui possède un gain optique et permet d'amplifier la lumière qui passe au travers. Considérez que la valeur maximale du gain optique est de $G_0 = 5.164 \times 10^{-4}\ cm^{-1}$ à une longueur d'onde de 632.81nm avec une largeur de bande (largeur du gain, BW) de 5 pm. Prenons que l'indice de réfraction du milieu de gain est de n = 1.00004.

1. **(5 points)** Lorsque la lumière se propage dans la cavité, son amplitude augmente selon $\boldsymbol{E_o \cdot exp(G_0 L)}$, où $\boldsymbol{E_0}$ est l'amplitude de la lumière avant la propagation dans le milieu de gain. Déterminez la longueur de la cavité, *L*, pour laquelle l'amplitude du champ électrique après un passage (aller-retour) reste inchangée, et ce, malgré les pertes occasionnées par un des miroirs.

2. **(5 points)** Quel est l'intervalle spectral libre en MHz des modes de la cavité Fabry-Pérot?

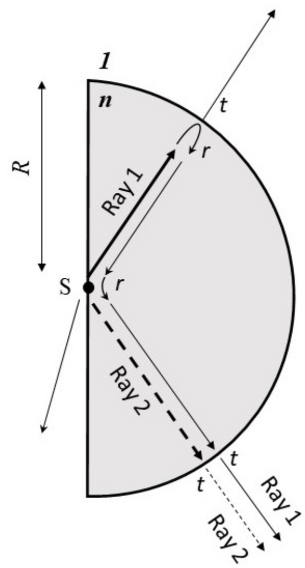
3. **(5 points)** Avec la cavité à l'équilibre (i.e. l'amplitude du champ électrique demeure inchangée), combien de modes de cavité sont contenus sous la courbe de gain (largeur de bande du gain)?

4. **(5 points)** Le gain peut être modélisé selon une courbe parabolique inverse à son sommet tel qu'exprimé selon la function:

$$g = G_0 - \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)^2$$

Déterminez à quelle longueur d'onde exactement, il y a un maximum de puissance à l'intérieur de la cavité.

QUESTION 6 : **OPTIQUE PHOTONIQUE 2**



Figure

Optique ondulatoire. Réflexions multiples dans une lentille semi-sphérique.

La figure ci-contre montre une lentille semi-sphérique de rayon R et d'indice de réfraction n placé dans l'air (indice de réfraction 1). Au centre de la lentille semi-sphérique, une source multi-fréquentielle S de rayonnement cohérent émet dans toutes les directions. La source est placée à la surface planaire de la lentille. En observant les chemins optiques des différents rayons, on peut observer que certains d'entre eux (par exemple le rayon 1 dans la figure) peuvent subir plusieurs réflexions à l'interface lentille/air. Ceci résulte en une interférence entre le rayon direct (rayon 2 dans la figure) et les multiples rayons réfléchis (par exemple le rayon 1 dans la figure ainsi que les autre rayons) qui sont émis par la source au même angle. Conséquemment, l'intensité de la lumière en sortie présentera des minimum et maximum correspondant aux conditions d'interférences constructive ou destructive à l'intérieur de la lentille.

a. **(5 points)** En sommant toutes les contributions provenant du rayon direct et des multiples rayons réfléchis (dans la lentille) trouvez l'expression du champ électrique complexe de la lumière de sortie

$$E(\nu) = E_0 \cdot t \cdot exp(i \cdot Rk_l) + E_0 \cdot t \cdot r^2 \cdot exp(i \cdot 3Rk_l) + \cdots ,$$

où r et t sont les coefficients de Fresnel à l'interface lentille/air de réflexion et transmission respectivement, $k_l=2\pi\nu n/c$ est la constante de propagation (nombre d'onde) dans la lentille, E_0 est l'amplitude du champ des rayons émis par la source et ν la fréquence. Pour simplifier, considérez que le coefficient de Fresnel en réflexion r est indépendant de l'angle, purement réel et le même à toutes les interfaces lentille/air. Considérez également que le coefficient de Fresnel de transmission t est purement réel.

b. **(10 points)** Trouvez l'expression pour l'intensité en sortie en fonction de la fréquence :

$$I(\nu) = E(\nu) \cdot E^*(\nu).$$

Trouvez les expression (en fonction des coefficient de réflexion et de transmission) pour les valeurs maximale $I_{max} = \max(I(\nu))$ et minimale $I_{min} = \min(I(\nu))$ de l'intensité de sortie, ainsi que les fréquences correspondantes ν_{max}, ν_{min} pour lesquelles ces valeurs sont atteintes.

c. **(5 points)** En prenant les expressions suivantes pour les coefficients de Fresnel de réflexion et de transmission à l'interface lentille/air :

$$t = \frac{2n}{n+1} \; ; r = \frac{n-1}{n+1}$$

calculez l'intensité de la modulation spectrale I_{max}/I_{min} en fonction des indices de réfraction de la lentille et de l'air.

QUESTION 7 : **PHYSIQUE DU SOLIDE 1**

Considérer un semi-conducteur intrinsèque dont la densité d'états électroniques $N(E)$ est représentée à la Fig. 1.

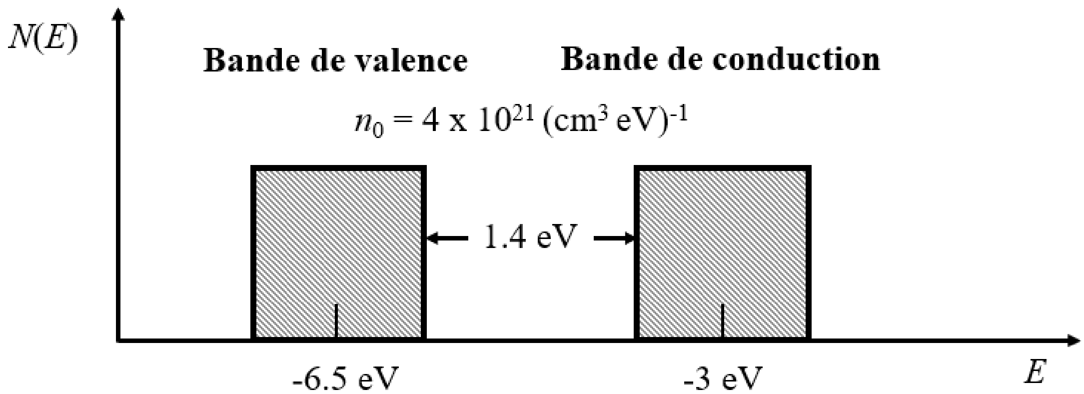


Figure 1. Densité d'états électroniques.

1. **(10 points)** Trouver les expressions pour la concentration de porteurs de charge n et p en considérant une fonction de distribution de Fermi-Dirac pour l'occupation des niveaux et que $N(E)$ contient déjà le facteur de dégénérescence de spin (facteur 2).

   Note: Vous pouvez considérer que Ec - E_f et $E_f - E_v >> k_BT$, où E_c et E_v correspondent aux bords des bandes de conduction et de valence.

2. **(6 points)** Démontrer et indiquer où se situe le niveau de Fermi par rapport aux bandes de valence et de conduction?

3. **(4 points)** Estimer la densité d'électrons de la bande de conduction à température ambiante.

QUESTION 8 : PHYSIQUE DU SOLIDE 2

Vibrations d'une chaine d'ions

Une chaine unidimensionnelle est composée de N ions de masse m séparés par une distance interatomique a. La charge des ions alterne de signe d'un ion à l'autre : q, $-q$, q, $-q$, ….

Ainsi, la vibration des ions fait intervenir deux termes. Le premier représente une force proportionnelle au déplacement des ions par rapport à leurs positions d'équilibre. Il s'agit de la loi de Hooke. Le deuxième résulte de l'interaction électrostatique des ions via la loi de Coulomb.

En ne considérant que les interactions **entre plus proches voisins**,

a) **(5 points)** Écrire l'équation du mouvement de l'ion à la position n, où n est un indice représentant un atome quelconque sur cette chaine. Utiliser $u_n(t)$ le déplacement de n par rapport à sa position d'équilibre et supposer que ce déplacement est petit par rapport à la séparation interatomique. Ainsi, considérer seulement des termes linéaires.

b) **(5 points)** Sans solutionner l'équation trouvée en a), donner la forme du déplacement $u_n(t)$ du **mode de vibration normal** en fonction du temps t et du nombre d'onde k si on impose la condition de périodicité suivante $u_n(t) = u_{n+N}(t)$.

c) **(5 points)** En utilisant $u_n(t)$ comme solution de l'équation trouvée en a), donner la relation de dispersion $\omega(k)$.

d) **(5 points)** Déterminer la vitesse du son. Discuter de l'effet de l'ionicité du réseau sur la fréquence des phonons et sur vitesse du son.