POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

EXAMEN GÉNÉRAL DE SYNTHÈSE – ÉPREUVE ÉCRITE
Programme de doctorat en génie physique

Jeudi 14 juin 2018

Salle A-552

de 9h30 à 13h30

NOTES :

- Aucune documentation permise.
- Calculatrice électronique non programmable permise.
- Le candidat répond à 6 questions de son choix sur les 8.
- Les questions ont toutes le même poids (20 points).
- **Utiliser un cahier différent pour chaque question en prenant soin d'inscrire le numéro de la question sur celui-ci.**
- Le questionnaire comporte 8 questions et 11 pages.

Département de génie physique
Pavillon principal
Téléphone : 514-340-4787
Télécopieur : 514-340-3218
Courriel : info@phys.polymtl.ca

Adresse postale
C.P. 6079, succ. Centre-ville
Montréal (Québec) Canada H3C 3A7
www.polymtl.ca

Campus de l'Université de Montréal
2900, boul. Édouard-Montpetit
2500, chemin de Polytechnique
Montréal (Québec) Canada H3T 1J4

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

Formules et relations utiles

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_v^* \Psi_v dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_v^* \Psi_v dy = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} H_v^2(y) e^{-y^2} dy = \alpha \pi^{1/2} 2^v v!$$

v !=v(v-1)(v-2)...

1 u = 931,494 MeV/c^2

CONSTANTES PHYSIQUES

$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C

$m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ Kg

$\hbar = 1.055 \times 10 \times 10^{-34}$ J·s

$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K

$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/M

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

ÉQUATIONS PHYSIQUES :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} dV$$

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}$$

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}$$

Relation de Clausius-Mossotti

$$\frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$$

ÉQUATIONS MATHÉMATIQUES

Intégrales

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

Loi des cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Approximation de Stirling

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Identité

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Identités trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

QUESTION 1 : ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

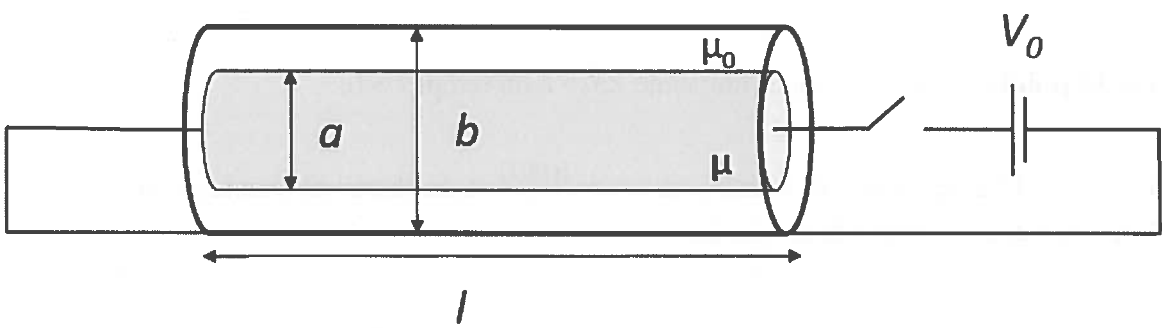
Considérons un long câble coaxial de rayon b et de longueur l, avec un conducteur central de rayon a. Le conducteur central est constitué d'un matériau ayant une résistivité ρ et une perméabilité magnétique linéaire μ. Le blindage externe est un conducteur parfait et est court-circuité au conducteur interne à l'extrémité gauche. À $t = 0$, une tension V_0 est soudainement appliquée à l'extrémité droite et reste constante par la suite.

Dans ce problème, vous pouvez supposer que le courant est uniforme sur toute la longueur du câble, que $l \gg b$ et que la capacité C du système est nulle.

(a) **(4 points)** Tracer le circuit électrique équivalent du système.

(b) **(8 points)** Déterminer la résistance R et l'inductance L du système.

(c) **(8 points)** Déterminer le courant $I(t)$ en fonction du temps.



QUESTION 2 : MÉCANIQUE QUANTIQUE

On considère une particule de spin ½ soumise à un champ magnétique $\boldsymbol{B}$ de la forme :

$$\boldsymbol{B} = B\cos(\omega t)\,\boldsymbol{z} \quad (B \text{ est une constante})$$

La particule se trouve dans l'état $|\psi_0(t)\rangle$ qui satisfait :

$$\hat{S}_x|\psi_0(t=0)\rangle = \frac{\hbar}{2}|\psi_0(t=0)\rangle$$

où $\hat{S}_x$ est l'opérateur spin selon l'axe x.

(a) 10 points Sachant que $|\psi_0(t=0)\rangle$ peut être exprimé en fonction des états propres de $\hat{S}_z$ $|+\rangle$ et $|-\rangle$, $\hat{S}_z$ est l'opérateur spin selon l'axe z, trouver le vecteur d'état de la particule à $t > 0$ $|\psi_0(t>0)\rangle$ tout en considérant que $\boldsymbol{B}$ varie avec le temps.

(b) 10 points Trouver la valeur moyenne $<\hat{S}_z>$ à un temps $t > 0$.

On donne l'hamiltonien : $\hat{H} = \omega_0 \hat{S}_z$ où $\omega_0 = \frac{|e|B(t)}{mc}$ (e, la charge élémentaire, m la masse de l'électron et c la vitesse de la lumière).

Rappel :

La solution de l'équation différentielle $\dot{f}(t) = y(t).f(t)$ est : $f(t) = f(0).exp\left(\int_0^t y(t').dt'\right)$

QUESTION 3 : PHYSIQUE STATISTIQUE

Susceptibilité magnétique d'un gaz d'électrons à une température *T*=0 °K.

Un électron de masse m, de quantité de mouvement p et de spin $s = \pm 1$ dans un champ magnétique H possède une énergie totale donnée par

$$\varepsilon_s = \frac{p^2}{2m} + s\, \mu_B\, H$$

où μ_B est le magnéton de Bohr. Ici, on supposera que la température du système est T=0 °K. Le potentiel chimique est alors exactement l'énergie de Fermi μ_0 et les électrons vont remplir tous les états avec une énergie $\varepsilon \leq \mu_0$.

a) **(5 points)** Déterminer $p_{\pm,\text{max}}$, la quantité de mouvement maximale que peuvent prendre ces électrons dans les états de spin $s = \pm 1$.

b) **(5 points)** Montrer que le nombre d'électrons $N_\pm$ dans les états de spin $s = \pm 1$ est donné par

$$N_\pm = \frac{4\pi V}{3h^3}\left(p_{\pm,\text{max}}\right)^3$$

c) **(5 points)** En supposant que le champ magnétique H est tel que $\mu_0 \gg \mu_B H$, calculer le nombre total d'électrons $N = N_+ + N_-$ dans un gaz a T=0 °K qui occupe un volume V. Quelle est l'aimantation $M = \mu_B(N_+ - N_-)$ de ce gaz d'électrons.

d) **(5 points)** Montrez que la susceptibilité magnétique de ce gaz d'électrons est

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{3N(\mu_B)^3}{2\mu}$$

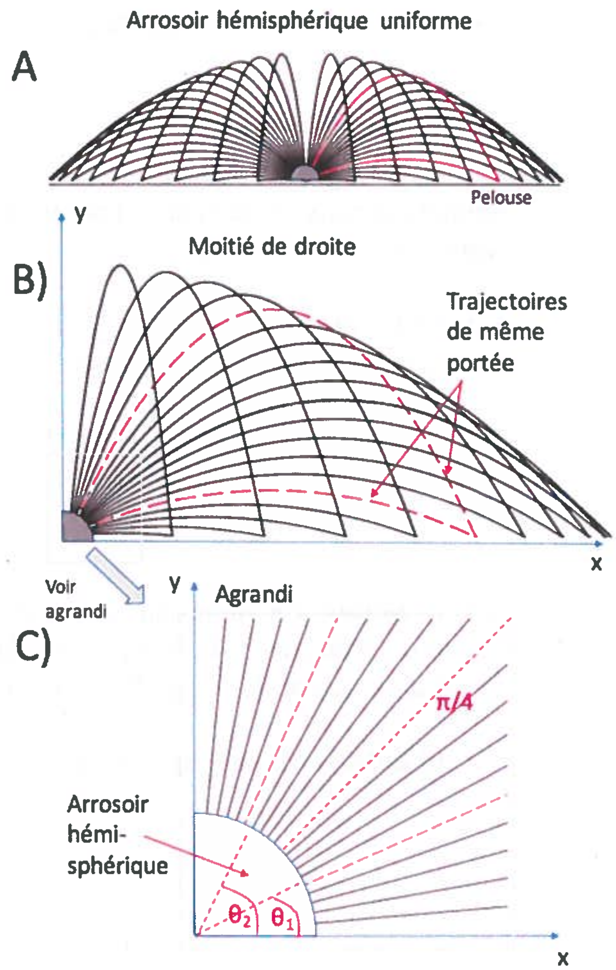
La relation suivante pourrait être utile

$$(1 + x)^p \approx 1 + px \text{ lorsque } x \ll 1.$$

<u>QUESTION 4</u> : MÉCANIQUE SUPÉRIEURE

Arrosoir hémisphérique uniforme

Un arrosoir de jardin est constitué d'une hémisphère de rayon R percé de centaines de petits trous émettant des jets de liquide à vitesse et débit constant perpendiculairement à sa surface. La distribution spatiale des trous est non-uniforme et telle que le jardin reçoit la même quantité d'eau en tout point à l'intérieur de la portée de l'arrosoir (Fig. A).



A) **(5 points)** Exprimez la portée d'un jet d'eau en fonction de sa position angulaire à la surface de l'arrosoir. Définissez les variables nécessaires et prenez comme référence angulaire $\theta = 0$ à l'horizontale)

B) **(5 points)** Tel qu'illustré aux Figs B-C, chaque point du sol sera arrosé par deux jets d'eau d'angles θ_1 et θ_2 avec l'horizontale. Donnez la relation entre les angles θ_1 et θ_2 arrosant à la même portée.

C) **(10 points)** Quelle est la distribution spatiale $n(\theta)$ des trous à la surface qui permettra un arrosage uniforme?

<u>Indice :</u> Supposez que les jets d'eau ont des trajectoires balistiques, c'est-à-dire que vous pouvez remplacer le fluide par des billes lancées à intervalle constant et vitesse constante des trous et le résultat sera le même.

<u>Identités utiles:</u>

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$$

$dS = R^2 d\Omega = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ petit élément de surface en coordonnées sphériques;

$dA = r\,dr\,d\phi$ petit élément de surface en coordonnées cylindriques;

QUESTION 5 : OPTIQUE PHOTONIQUE 1

Optique : Vélocimétrie par interférométrie

L'interférométrie permet de mesurer la vitesse de déplacement d'objets partiellement réfléchissants, par exemple des cellules dans un vaisseau sanguin. On étudie ici un modèle simplifié où l'objet mobile est un miroir parfaitement réfléchissant.

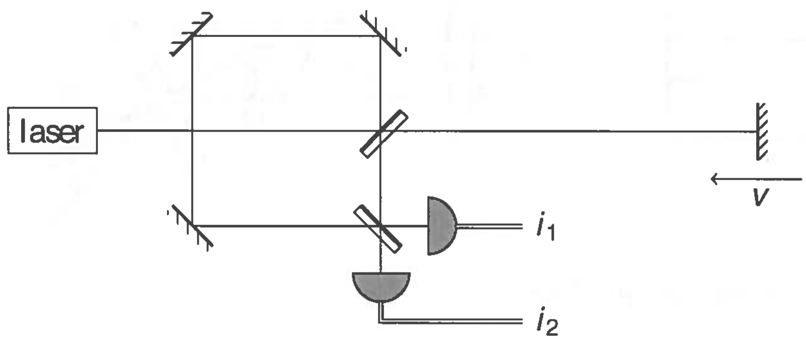
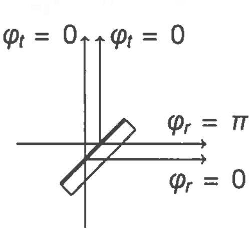


Figure : Système interférométrique pour la mesure de vitesse du miroir mobile à droite.

Un laser monochromatique de longueur d'onde de 1 μm passe à travers le système interférométrique représenté sur la figure comprenant deux lames séparatrices 50/50 et trois miroirs fixes parfaitement réfléchissants. L'objet dont on mesure la vitesse est le miroir mobile représenté à droite sur la figure.

1) **(4 points)** Sur un schéma similaire à celui de la figure, tracer les deux chemins optiques participant à l'interférence. Un chemin sert de référence et le second dépend de la position du miroir mobile.
2) **(8 points)** Calculer la dépendance temporelle de la différence de photo-courant $\Delta i = i_2 - i_1$ des photo-détecteurs en fonction de la vitesse de déplacement v du miroir mobile.
3) **(4 points)** Quelle est la fréquence d'oscillation de la différence de photo-courant pour un déplacement de vitesse $v = 1$ cm/s ?
4) **(4 points)** Supposons maintenant que la longueur de cohérence du laser est de 10 cm, quelle précaution doit être prise pour assurer le succès de la mesure de vitesse ?

Si vous désirez lever une ambiguïté sur la phase exacte de chaque chemin optique, on précise que les lames séparatrices sont constituées de couches diélectriques appliquant une phase supplémentaire de 0 ou π radians dépendant du côté d'incidence.



QUESTION 6 : OPTIQUE PHOTONIQUE 2

Nous allons concevoir un système optique exploitant une fibre optique, une lentille et un réseau de diffraction. L'ensemble est montré à la figure suivante.

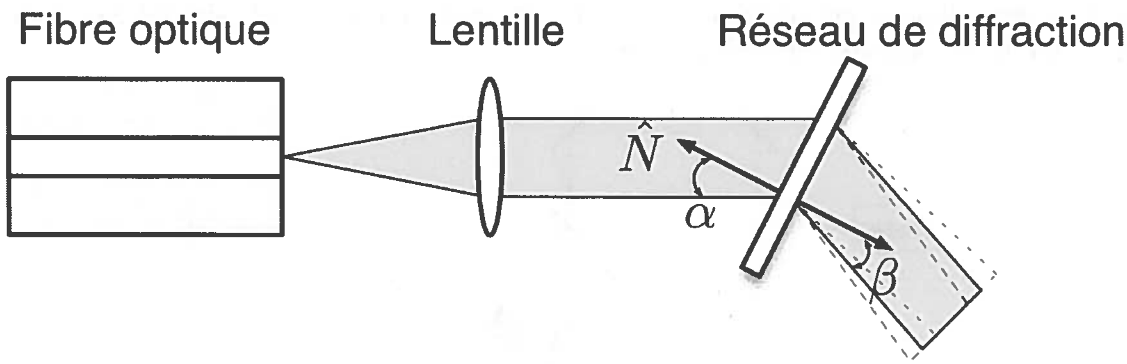


Figure 1 Montage optique final

Chacune des questions mesure votre connaissance des composantes individuelles.

Partie 1: **(5 points)** Lois de Snell-Descartes appliquée aux fibres optiques

a) Nommez le principe optique qui permet la propagation presque sans pertes dans les fibres optiques.

b) L'ouverture numérique (ON) d'un système optique est définie par :

$$ON = n \sin \theta$$

où θ est le demi-angle du cône d'acceptance de la lumière dans un système optique. L'ON peut aussi être utilisée pour une fibre optique. Prenons l'exemple le plus simple d'une fibre à saut d'indice. En imaginant la fibre comme uns structure bidimensionnelle, montrez que l'ouverture numérique peut s'écrire :

$$ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

où n_1 est l'indice du cœur de la fibre (la partie de la fibre qui transmet la lumière) et n_2 est l'indice de la gaine de la fibre optique (la partie de la fibre qui ne transmet pas la lumière). Utilisez les variables de la figure 2.

(page suivante)

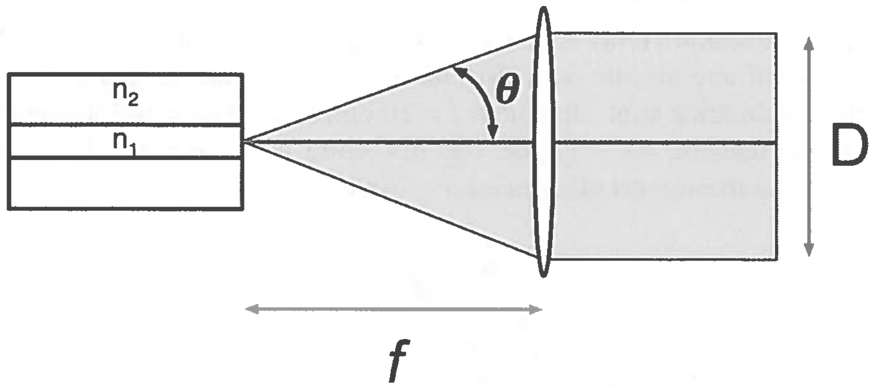


Figure 2 Variables utilisées pour décrire la fibre, la lentille et le faisceau parallèle.

Note : Ici, on ne considère la lumière transmise par le guide d'onde que dans le mode fondamental, dans le cœur de la fibre. Pour vous aider, vous pouvez utiliser l'identité : $\sin(90-\alpha)=\cos(\alpha)$.

Partie 2 : **(5 points)** Loi des lentilles minces

Vous placez à la sortie de la fibre optique une lentille de sorte à créer un un faisceau parallèle dont le diamètre est de D, tel que montré à la figure 2. En utilisant l'approximation paraxiale, quelle devrait être la longueur focale, f, de la lentille utilisée? Écrivez une équation reliant la focale, le diamètre et l'ouverture numérique de la fibre optique.

Partie 3 : **(5 points)** Dispersion

La lumière issue de la fibre optique est polychromatique. Le centre du spectre de la lumière est situé dans le rouge, à une longueur d'onde de 632nm. Le spectre a une demi-largeur à mi-hauteur de 30nm. Le spectre couvre donc une plage spectrale allant de 617nm à 647nm. Vous craignez que l'utilisation d'une lentille mince ne cause de la dispersion chromatique.

a) Définissez en vos mots le phénomène de dispersion chromatique;
b) Proposez une solution pour mitiger l'effet de la dispersion. Expliquez brièvement comment mettre en place cette solution.

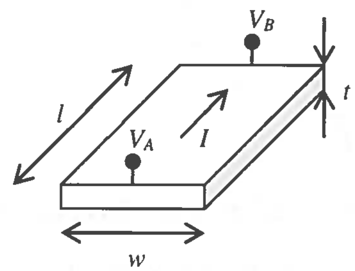
Partie 4 : **(5 points)** Réseau de diffraction

À 25mm de votre lentille, vous placez une réseau de diffraction en configuration de Littrow (l'angle d'incidence et de sortie du premier ordre de diffraction sont identiques pour la longueur d'onde centrale), tel qu'illustré à la figure 1. Le réseau de diffraction a 1000 lignes par millimètre et s'utilise en transmission. Quel est l'angle d'incidence pour ce réseau en configuration de Littrow?

QUESTION 7 :   PHYSIQUE DU SOLIDE 1

Modèle d'un gaz d'électrons libres appliqué au Na

On considère une couche mince de sodium (Na). La couche, qui repose sur un substrat isolant, est mise en forme de ligne conductrice pour une mesure de résistivité tel qu'illustré sur la figure 1 ci-dessous. Les dimensions de la couche conductrice sont : longueur l = 10 cm, largeur w = 100 μm et épaisseur t = 1.0 μm. L'application d'une tension, $V_A - V_B$, de 100 mV entre les extrémités de l'échantillon produit un courant I de 2.0 mA. La mesure est effectuée à T = 300K.



Sur la base du modèle de l'électron libre, on peut utiliser ces mesures pour estimer le libre parcours moyen des électrons de conduction.

a) **(5 points)** À partir des données expérimentales, et considérant la loi d'Ohm et le lien entre la résistance et la résistivité électrique, déterminer la valeur numérique de la résistivité électrique du Na.

b) **(5 points)** On admet que le Na possède une structure cubique centrée, avec un paramètre de maille a = 0.423 nm, et que chaque atome de Na fournit un électron de conduction. Déterminer la valeur numérique de la densité d'électrons libres dans le matériau.

c) **(5 points)** Utiliser le modèle de l'électron libre pour estimer la valeur de l'énergie de Fermi (en eV) pour le Na.

d) **(5 points)** Sur la base des résultats trouvés en a), b) et c), et considérant la formule de Drude, déduire l'expression et la valeur numérique du libre parcours moyen des électrons de conduction.

   On rappelle la formule de Drude pour la conductivité électrique :

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

QUESTION 8 : PHYSIQUE DU SOLIDE 2

Considérer un cristal unidimensionnel pour lequel la distance interatomique est a. Dans l'approximation des liaisons fortes, l'énergie d'un électron en fonction du vecteur d'onde k de l'électron, $\varepsilon(k)$, est donnée, pour des fonctions d'ondes de type s par :

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_s - 2\,\beta_s \cos(ka)$$

Où ε_s est le niveau d'énergie de l'état s, et β_s est l'intégrale de recouvrement des fonctions d'onde s.

a) **(3 points)** Tracer $\varepsilon(k)$ dans la 1^{re} zone de Brillouin de même que pour une représentation en zone répétée. Quelle est la largeur de cette bande?

b) **(4 points)** Déterminer la masse effective des électrons m_e^* à k=0.

c) **(5 points)** Déterminer la vitesse $v(k)$ des électrons et tracer $v(k)$ dans la représentation en zone répétée. Pourquoi la vitesse $v = 0$ aux plans de Bragg ?

d) **(8 points)** On applique un champ E constant dans l'espace et dans le temps. Supposer que, à $t = 0$, le vecteur d'onde de l'électron est $k = 0$. Faire également l'hypothèse que l'électron ne subit pas de collisions en présence du champ. Montrer que la position $x(t)$ de l'électron dans l'espace *réel* correspond à un mouvement oscillatoire. Discuter le fait qu'un mouvement oscillatoire soit prévu avec l'application d'un champ *constant*. Est-ce possible?