POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

EXAMEN GÉNÉRAL DE SYNTHÈSE – ÉPREUVE ÉCRITE
Programme de doctorat en génie physique

Jeudi 21 novembre 2019

Salle C-539.4 (pavillon principal)

de 9h30 à 13h30

NOTES :

- Aucune documentation permise.
- Calculatrice électronique non programmable permise.
- Répondre à 6 questions au choix parmi les 8.
- Les questions ont toutes le même poids (20 points).
- Le questionnaire comporte 8 questions et 10 pages.
- Utiliser un cahier différent pour chaque question en prenant soin d'inscrire le numéro de la question sur celui-ci.

Département de génie physique
Pavillon principal
Téléphone : 514-340-4787
Télécopieur : 514-340-3218
Courriel : info@phys.polymtl.ca

Adresse postale
C.P. 6079, succ. Centre-ville
Montréal (Québec) Canada H3C 3A7
www.polymtl.ca

Campus de l'Université de Montréal
2900, boul. Édouard-Montpetit
2500, chemin de Polytechnique
Montréal (Québec) Canada H3T 1J4

FORMULES ET RELATIONS UTILES

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \approx \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

CONSTANTES PHYSIQUES

$e = 1.602 \text{ x } 10^{-19}$ C
$m_e = 9{,}109 \text{ x } 10^{-31}$ Kg
$\hbar = 1.055 \text{ x } 10 \text{ x } 10^{-34}$ J·s
$k_B = 1.381 \text{ x } 10^{-23}$ J/K
$\varepsilon_0 = 8.854 \text{ x } 10^{-12}$ F/M
$\mu_0 = 4\pi \text{ x } 10^{-7}$ N/A^2

ÉQUATIONS PHYSIQUES :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} \, dV$$

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}$$

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}$$

Relation de Clausius-Mossotti

$$\frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$$

ÉQUATIONS MATHÉMATIQUES

Intégrales

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

Loi des cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Approximation de Stirling

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Identité

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Identités trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

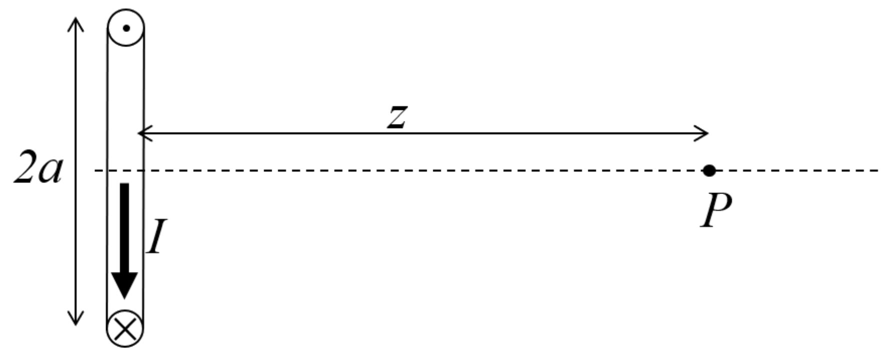
$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

QUESTION 1 : **ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME**



Considérons un anneau conducteur de rayon a, portant un courant constant I, comme indiqué ci-dessus.

a) **(5 points)** Notez la loi qui est utilisée pour calculer le champ magnétique résultant $\boldsymbol{B}$ généré par un contour de courant constant I. Définissez tous les termes pertinents.

b) **(2 points)** Esquissez les lignes du champ $\boldsymbol{B}$ autour de l'anneau. Sans effectuer de calcul, fournissez une argumentation pour la direction du champ $\boldsymbol{B}$ sur l'axe de symétrie de l'anneau, c'est-à-dire la ligne en pointillé dans le dessin ci-dessus.

c) **(6 points)** Appliquez l'expression générale de la partie (a) pour trouver le champ $\boldsymbol{B}$ au point P, situé sur l'axe de symétrie de l'anneau, à une distance z du centre, comme indiqué ci-dessus. Tracez la dépendance z des composants de $\boldsymbol{B}(z)$.

d) **(3 points)** Supposons maintenant que nous formions un solénoïde: une hélice de fil conducteur étroitement enroulée, dans laquelle chaque fil tourne, avec une excellente approximation, peut être considérée comme produisant le champ $\boldsymbol{B}$ d'un anneau conducteur dont il est question aux points b) et c). Esquissez les lignes du champ $\boldsymbol{B}$ autour d'un solénoïde de longueur finie L. Sans effectuer de calcul, fournissez une explication et un aperçu qualitatif de la dépendance z des composants de $\boldsymbol{B}(z)$.

e) **(4 points)** Calculez le champ **B** d'un solénoïde pour $L \to \infty$, en prenant en compte n tours de fil par unité de longueur.

QUESTION 2 : **MÉCANIQUE QUANTIQUE**

À $t = 0$, la fonction d'onde d'une particule dans le potentiel $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ est

$$\Psi(x, t = 0) = A\sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \psi_n(x),$$

où $\psi_n(x)$ est un état stationnaire dont l'énergie est $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ et $n = 0, 1, 2, \ldots$

Considérez ces états comme étant mutuellement orthonormaux, $\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{n,m}$.

a) **(5 points)** Trouvez la constante de normalisation A.

b) **(5 points)** Donnez la valeur moyenne de l'énergie.

c) **(5 points)** Donnez l'expression pour $\Psi(x, t)$ dependante du temps.

d) **(5 points)** Démontrez que la densité de probabilité $\Psi(x, t)$ est une fonction périodique du temps. Donnez cette période temporelle.

Information utile:

$$\sum_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$
$$\sum_n n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

QUESTION 3 : **PHYSIQUE STATISTIQUE**

La figure 1 montre un modèle d'une longue chaîne moléculaire constituée par n structures chimiques similaires. Sous l'effet d'une force externe F, la longueur parallèle à la direction de la chaîne pour chaque élément est égale à l_o. Comme le montre la figure ci-dessous, chaque élément de la chaîne peut avoir deux états non dégénérés d'énergie, c.-à-d. un état horizontal ou un état vertical caractérisées par les valeurs d'énergie correspondantes de $-Fl_o$ et 0. En exprimant la longueur totale de la chaîne comme $n \cdot x$ où $0 < x < \ell_o$ (voir la figure), on vous demande :

a) **(4 points)** D'exprimer la fonction de partition pour ce système;

b) **(6 points)** De trouver l'expression de l'entropie de la chaîne en fonction de x;

c) **(8 points)** De trouver la longueur moyenne totale de la chaîne en fonction de la température;

d) **(2 points)** D'analyser vos résultats et de déterminer les conditions pour lesquelles cette chaîne moléculaire obéit à la loi de Hooke qu'on trouve dans le logo de Polytechnique « ***Ut tensio sic vis*** ». (**Note importante**: pour répondre à cette question, vous devez supposer que le travail d'élongation exprimé par le produit Fl_o est beaucoup plus faible que $k_B T$).

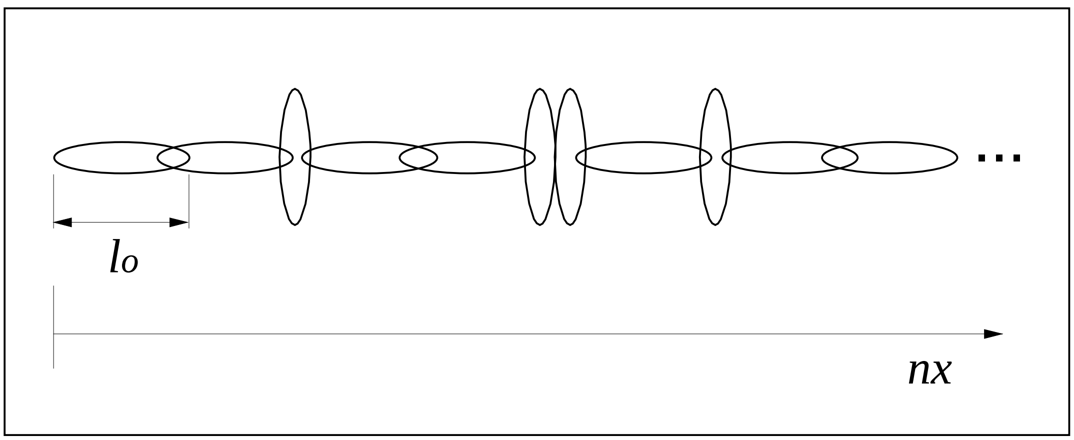
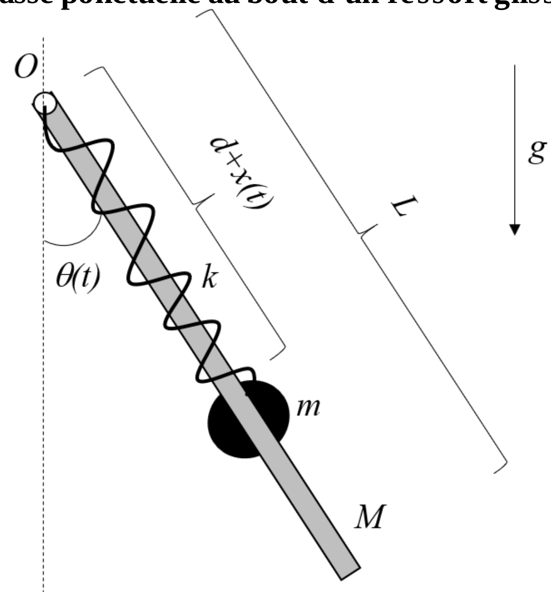


Figure 1. Modèle d'une longue chaîne moléculaire.

Note : Pour effectuer vos calculs, vous pouvez utiliser l'approximation suivante : $e^x \approx 1 + x$, avec $x << 1$.

QUESTION 4 : **MÉCANIQUE SUPÉRIEURE**

Mécanique théorique. Masse ponctuelle au bout d'un ressort glissant le long d'un pendule.



Considérons un pendule en forme d'une mince tige cylindrique uniforme de longueur L, de masse M et de moment d'inertie $I = ML^2/3$ (par rapport au point O), qui comporte également un ressort sans masse avec une constante du ressort k enroulée autour du pendule. L'une des extrémités du ressort est fixée à l'origine O, tandis que l'autre est fixée à une masse ponctuelle m qui est libre de glisser sur la tige sans frottement. La longueur d'équilibre d'un ressort sans masse ponctuelle est d. Supposons qu'un ressort étendu est de longueur $d + x(t)$ et définissons l'angle entre la tige et la verticale comme $\theta(t)$. Supposons que le mouvement se déroule dans un plan vertical sous une gravité normale avec l'accélération en chute libre donnée par g. En utilisant les notions de mécanique de Lagrange, trouvez les équations du mouvement pour $x(t)$ et $\theta(t)$.

a) **(3 points)** Écrivez l'expression pour l'énergie cinétique totale du système.

b) **(3 points)** Écrivez l'expression pour l'énergie potentielle totale du système.

c) **(9 points)** Écrivez l'expression pour Lagrangien du système, aussi bien que les deux équations de mouvement correspondantes pour $x(t)$ et $\theta(t)$ (équations d'Euler-Lagrange).

À la limite des petits angles $\theta(t) << 1$ des oscillations du pendule et des petits déplacements d'une masse ponctuelle, on peut linéariser les équations d'Euler-Lagrange. Résolvez-les exactement en utilisant:

$\theta(t)=A_\theta\ exp(i\omega_\theta t+\phi_\theta)$ et $x(t)= mg/k+A_x\ exp(i\omega_x t+ \phi_x)$.

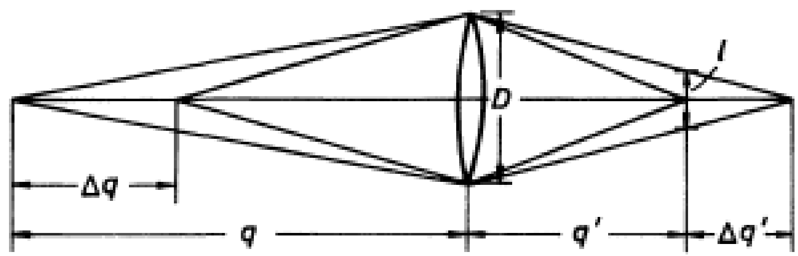
d**) (5 points)** Linéarisez l'équation du mouvement pour $\theta(t)$ en supposant que $sin(\theta(t)) = \theta(t)$ et considérez que l'amplitude et la vitesse des oscillations d'une masse ponctuelle sont négligeables : $A_x \to 0,\ \partial x/\partial t \sim A_x \cdot \omega_x \to 0$. Trouvez l'équation du mouvement linéarisée pour $\theta(t)$ ainsi que l'expression de la fréquence des oscillations d'un pendule ω_θ.

QUESTION 5 : **OPTIQUE PHOTONIQUE 1**

(20 points)
Pour un objectif d'appareil photo, la *profondeur de champ* quantifie à quelle distance un objet ponctuel (à une distance q) peut être éloigné de la position où il serait précisément mis au point (focus) tout en laissant la lumière de celui-ci arriver sur la pellicule photographique
(à une distance q') à l'intérieur d'un *cercle de confusion* de diamètre l.

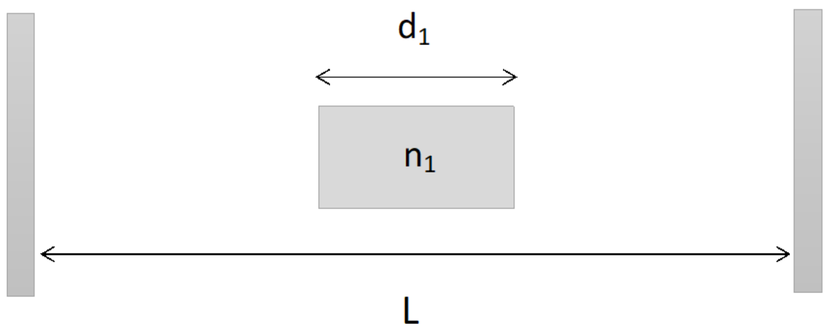
Pour une image donnée, trouvez une relation mathématique pour la profondeur de champ $\Delta q'$ en fonction de la distance de l'objet q, de la distance focale de la lentille f, de l'ouverture géométrique de la lentille (défini comme $N=f/D$, où D est le diamètre de la lentille) et du diamètre du cercle de confusion.

Remarque: Vous pouvez considérer que la distance de l'objet est beaucoup plus grande que la distance focale.



QUESTION 6 : **OPTIQUE PHOTONIQUE 2**

Considérez la cavité laser illustrée ci-dessous. Elle est composée de 2 miroirs, avec coefficients de réflexion R (en intensité) séparés par une distance L. Elle inclut un milieu diélectrique d'indice n_1 et longueur d_1.



a) **(5 points)** Calculez l'intervalle spectral libre de la cavité.

b) **(5 points)**Calculez le temps de vie d'un photon dans cette cavité. Le temps de vie correspond au temps requis pour que l'énergie dans la cavité soit réduite d'un facteur 1/*e*.

Les deux questions suivantes ne dépendent pas de vos réponses en a) et b).

Considérez la situation où le milieu diélectrique est pompé et où la cavité commence à osciller dans 2 modes avec fréquences ν_1 et ν_2. Les champs électriques correspondant à chaque mode sont mesurés à l'aide d'un détecteur placé à la sortie de la cavité et un filtre spectral. Ils sont donnés par $E(t) = E_1 \cos\left(2\pi\nu_1 t + \varphi_1(t)\right)$ et $E(t) = E_2 \cos\left(2\pi\nu_2 t + \varphi_2(t)\right)$. On enlève ensuite le filtre spectral.

c) **(5 points)** Trouvez une expression pour l'intensité sur le détecteur en fonction du temps si les phases φ_1 et φ_2 sont indépendantes du temps.

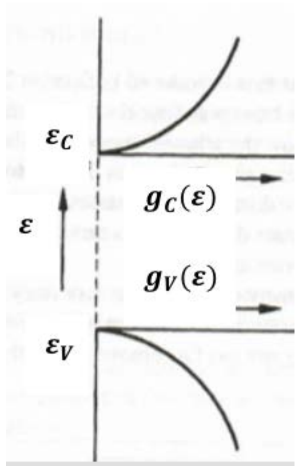
d) **(5 points)** Trouvez une expression pour l'intensité sur le détecteur si les phases φ_1 et φ_2 oscillent aléatoirement de façon indépendante. Vous pouvez considérer que votre détecteur est lent par rapport à ces oscillations.

QUESTION 7 : **PHYSIQUE DU SOLIDE 1**

Considérez un semiconducteur intrinsèque. Soit ε l'énergie d'un électron, $g_C(\varepsilon)$ la densité des états dans la bande de conduction et $g_V(\varepsilon)$ la densité des états dans la bande de valence (voir la figure ci-dessous). Dans l'hypothèse que $\varepsilon_C - \varepsilon_F \gg k_B T$ et $\varepsilon_F - \varepsilon_V \gg k_B T$ et

$$g_C(\varepsilon) = A_1(\varepsilon - \varepsilon_C)^{\frac{1}{2}}$$
$$g_V(\varepsilon) = A_2(\varepsilon_V - \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

où ε_C représente l'énergie plus basse dans la bande de conduction, ε_V l'énergie plus haute dans la bande de valence, ε_F l'énergie de Fermi, T la température, k_B la constante de Boltzmann, A_1 et A_2 deux préfacteurs constants.



a) **(7 points)** Trouvez une expression pour le nombre d'électrons dans la bande de conduction (n) en fonction de ε_C, ε_F, k_B, T et A_1.

b) **(7 points)** Trouvez une expression pour le nombre de trous dans la bande de valence (p) en fonction de ε_V, ε_F, k_B, T et A_2.

c) **(6 points)** Écrivez une expression explicite pour $\varepsilon_F(T)$.

Annexe

$\int_0^\infty e^{-x} x^{1/2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

QUESTION 8 : **PHYSIQUE DU SOLIDE 2**

Considérons un modèle classique d'un solide composé de n atomes indépendants, chacun composé d'un électron lié à un noyau infiniment massif par un ressort (obéissant à la loi de Hooke), avec une fréquence propre ω_0. Les processus dissipatifs sont modélisés par une force de friction $\boldsymbol{F} = -\Gamma \boldsymbol{v}$, où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse des électrons et $\Gamma > 0$. Considérons la réponse de ce solide à un petit champ électromagnétique externe de fréquence angulaire ω.

a) **(4 points)** Écrivez une équation classique du mouvement pour le déplacement des électrons de l'équilibre en fonction du champ électromagnétique appliqué. Définir tous les termes dans l'expression finale. (Indice: justifiez la prise en compte de la réponse électronique uniquement pour la composante électrique du champ de l'incident).

b) **(6 points)** Dérivez l'expression pour les parties réelles et imaginaires de la permittivité diélectrique. Esquissez les deux quantités en fonction de la fréquence et attribuez-leur la signification physique.

c) **(3 points)** Notez l'expression de la permittivité diélectrique obtenue en b) dans la limite d'élimination ω_0. Discutez de la classe de matériaux décrite par cette réponse et identifiez la fréquence caractéristique et une échelle de temps avec les quantités familières du modèle de Drude.

d) **(4 points)** Déterminez la réflectivité R du matériau décrit en c) dans la limite de $\Gamma \to 0$. Fournissez un croquis de $R(\omega)$.

e) **(3 points)** En vous basant sur l'aspect visuel de l'or, expliquez comment on peut estimer la valeur de la fréquence du plasma dans ce métal. Comment pensez-vous que cette valeur changera pour l'argent?